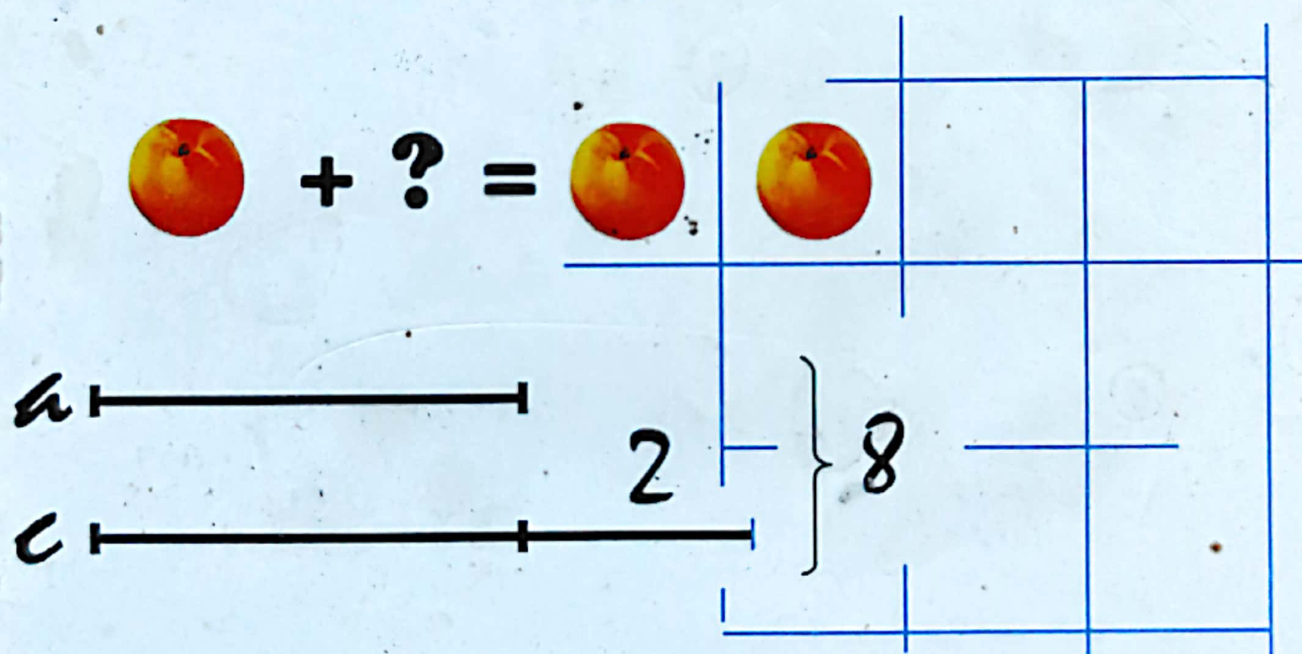
Dumitru D. Pârâială
Viorica Pârâială

ARITMETICA

PROBLEME TIPICE REZOLVATE PRIN MAI MULTE METODE ȘI PROCEDEE

VOL. II



CULEGERE PENTRU ELEVII CLASELOR a II-a - a VI-a ȘI AI ȘCOLILOR NORMALE

EDITURA POLIROM

colecţia «+ UNU»

Dumitru Pârâială, Viorica Pârâială

ARITMETICĂ

vol. II

Coperta: Cătălin Șoldan
Grafica: Cristian-George Pârâială
Bogdan-Dimitrie Pârâială
Dumitru Scorțanu

„Aritmetica, deosebit de întrebuințarea ei cea de obște, cuprinde... folosul de a deprinde cugetarea și pătrunderea la înțelegere și a da plăcere pentru deslușirea ideilor."

Gh. Asachi

Volumul I al culegerii:
ed. I-a, Institutul European, Iași, 1992.
ed. a II-a, Institutul European, Iași, 1993.
ed. a III-a, Ed. Gama Iași, 1995.

Editura POLIROM, B-dul Copou nr. 3
P.O. BOX 266, 6600 Iași, ROMANIA

ISBN: 973-97108-1-6
Printed in ROMANIA

Dumitru D. Pârâială
institutor, grad I

Viorica Pârâială
institutoare, grad I

ARITMETICĂ

vol. II

Exerciții și probleme rezolvate prin mai multe metode și procedee

Culegere pentru elevii claselor a II-a – a VI-a și ai școlilor normale.

Editura POLIROM
Iași, 1995

Cuvînt înainte

Prezenta lucrare continuă programarea enunţată în volumul I, apărut în anul 1992.

Consecvenţi ideii că activitatea matematică presupune organizare, sistematizare şi solicită o temeinică bază metodico-informaţională, care asigură manifestarea creatoare a gîndirii, în volumul de faţă, la sugestia multor colegi, am cuprins mai multe tipuri de exerciţii-problemă, probleme de mişcare, probleme de logică şi de perspicacitate. Problemele tipice au fost organizate potrivit criteriului relaţiilor dintre date, de la cele mai simple la cele mai complexe, cu o arie mult mai largă de aplicabilitate. Ele completează capitolele I-VIII din primul volum.

În primul capitol, la sugestia d-nei prof. Veronica Barnea, de la Şcoala Normală „V. Lupu" din Iaşi, căreia, pe această cale îi mulţumim, am propus mai multe soluţii la exerciţii-problemă, folosind proprietăţile operaţiilor cu numere naturale, dependenţa dintre modificările termenilor (factorilor) şi rezultate, tehnici de calcul rapid. În subcapitole distincte, am cuprins tehnici pentru obţinerea unor egalităţi, a unor inegalităţi din alte egalităţi (inegalităţi) date, scrierea sistematică a numerelor naturale, aflarea terminaţiei rezultatelor unui şir de operaţii etc. şi folosirea acestora în probleme.

În ultimul capitol, aşa-numitele probleme de logică şi perspicacitate au fost sistematizate pe baza analogiei dintre modurile de rezolvare, a orientării specifice a raţionamentului.

Ne-am propus şi în acest volum să prezentăm mai multe moduri (metode) şi procedee de rezolvare a problemelor mai dificile din culegerile apărute şi din *Gazeta matematică*.

Unele dintre probleme au fost culese, transformate sau rezolvate de foştii sau actualii noştri elevi: Abăitănei D., Hoştinar C., Sufiţchi T., Posmangiu A., Bordei A., Florea O., Necula R., Tigîţă A., Nechita A., Chirilă C., Spînu C., Ciobanu G., Chebac A., Munteanu D., Popovici Ş., Roşcăneanu D., Popa A., Maxim I., Borza L., Balan S., Cristian, Bogdan ş.a.

Mulţumim tuturor acelora care ne-au transmis sugestii pentru îmbunătăţirea primului volum, aşteptăm altele pentru o eventuală reeditare.

Autorii

CAPITOLUL I

Exerciții-problemă

I. Enunțuri

I.A. Efectuați, respectînd ordinea operațiilor:

1. a). $[(235+145:5-119):5+23\times 6+101\times 3]:10=$

b). $(102-36\times 4:8):7+35\times 3+8\times(37-5\times 7):8=$

c). $(115:5-20)\times[120+(7\times 8-224:7)]:9=$

d). $6+6\times\{5+6\times[3+6\times(18-15)]\}=$

e). $30\times\{3+6\times[9+15\times(6+6-9)]\}=$

f). $\dfrac{12\times 10:6-(200-20):9+1}{5-(24:8+7:7)}=$

g). $[(25+5^2):5+36:2]:2^2-6:6=$

h). $(79+79:79):(116+29-15\times 7)=$

i). $(3\ 044+2\ 056):17+3\ 075:5:3-6\ 992:(38\times 23)=$

j). $(120\times 5-60):5+240\times 3-(180-312:12)=$

k). $(750\times 306-375\times 208):(3\ 700:185+630:6)=$

l). $1\ 225:(170-15\times 9):[(5\times 45-50):25]:5=$

m). $1\ 003\ 040-13\times\{13+15\times[123+13\times(107-91)]\}=$

n). $\dfrac{(137\times 25+105\times 15):50+145\times 28}{13\times 8\times(175-25\times 3):10}=$

o). $45\times 10^3-[(25\times 10^5):(5\times 10^4)+(6\times 10^3):(4\times 10^2)]\times 45=$

I. B. Folosind regulile referitoare la ordinea efectuării operațiilor cu numere naturale și la proprietățile acestora, calculați în mai multe moduri (unele exerciții au sarcini suplimentare):

2. $45+22+55=$
3. $138+(129+362)=$
4. $(132+1\ 004+609)+996=$
5. $(1\ 694+583)-694=$
6. $(389+3\ 184+2\ 976)-1\ 976=$
7. $68-(32+29)=$

8. $91-(54+17+16)=$
9. $36+(44-21)=$
10. $153+(128-113)=$
11. $36-(100-64)=$
12. $159-(99-41)=$
13. $20-9+9=$
14. $130-70+70=$
15. $100+200-200=$
16. $78+39-39=$
17. $100-16-19-64=$
18. $1\,986-452-326-109-98=$
19. Încercînd să scrie într-un exercițiu (formulă numerică) rezolvarea problemei: „Silviu are 9 lei. Trebuie să dea 11 lei lui Dan, iar de la Cristi trebuie să primească 4 lei. Cîți lei va avea Silviu în final?", Alex obține „$9-11+4=$" și afirmă că problema nu se poate rezolva. Are dreptate?
20. Scrierea în exercițiu a rezolvărilor unor probleme asemănătoare cu cea de la nr. 19 a dus la exercițiile de mai jos. Le puteți rezolva?
   a) $9\,000-9\,868+869=$
   b) $83-91+17=$
   c) $98-101+3+200+117-190=$
   d) $100-90+70-20=$
   e) $900-88-814+6=$
   f) $19-28-16+81-6=$
   g) $3\times4-5\times3+3\times3+7\times3-3\times6=$
21. $2\times4\times6\times5=$
22. $4\times8\times7\times75\times25=$
23. $(5\times6\times8)\times100=$
24. $14\times(9\times8\times2\times5)=$
25. $2\times(7+8)=$
26. $(4+5)\times6=$
27. $6\times(5+15+10)=$
28. $4\times(11-7)=$
29. $(180-171)\times9=$
30. $10\times(72-39-13)=$
31. a) $6\times(40-32+4)=$
   b) $6\times40+6\times32=$
   c) $103+5\times103-103\times2=$
32. $(200+90+1)\times(10+2)=$
33. $(30+15+4)\times(7+6)=$
34. $(136+129)\times(10+20+30+40)=$
35. $9\times63 : 63=$
36. $105\times14 : 14=$

37. $4 \times 1\,397 : 4 =$
38. $864 : 72 \times 72 =$
39. $324 : 18 \times 18 =$
40. $(4 \times 6 \times 5) : 3 =$
41. $(208 \times 72 \times 96) : 4 =$
42. $(2\,000 \times 387) : 1\,000 =$
43. $180 : (3 \times 4 \times 5) =$
44. $3\,240 : (9 \times 3 \times 24) =$
45. $(9 \times 8 \times 4) : (3 \times 2 \times 4) =$
46. $(6 \times 9 \times 8) : (2 \times 3 \times 4) =$
47. $(18 \times 36) : (9 \times 4 \times 3) =$
48. $(72 \times 2 \times 16) : (8 \times 8) =$
49. $324 : (18 : 6) =$
50. $18 : (42 : 7) =$
51. $63 : (6 : 2) =$
52. $(55 + 10) : 5 =$
53. $(63 + 28 + 735) : 7 =$
54. $(72 - 36) : 9 =$
55. $(192 - 12 - 36) : 6 =$

I. C. Pe baza modificărilor pe care le suportă termenii (factorii), calculați rezultatele. Verificați apoi, respectînd ordinea efectuării operațiilor

56. $\underline{1\,009 + 2\,991 = 4\,000}$
   a) $(1\,009 + 137) + 2\,991 =$
   b) $1\,009 + (2\,991 + 248) =$
   c) $(1\,009 + 248) + 2\,991 =$

57. $\underline{4\,908 + 5\,092 = 10\,000}$
   a) $4\,910 + 5\,092 =$
   b) $4\,908 + 5\,101 =$
   c) $4\,917 + 5\,092 =$

58. $\underline{2\,098 + 6\,992 = 9\,090}$
   a) $(2\,098 - 2) + 6\,992 =$
   b) $2\,098 + (6\,992 - 2) =$
   c) $(2\,098 - 87) + 6\,992 =$

59. $\underline{3\,026 + 414 = 3\,440}$
   a) $3\,006 + 414 =$
   b) $3\,026 + 404 =$
   c) $3\,022 + 414 =$

60. $\underline{998 + 2\,002 = 3\,000}$
   a) $(998 + 14) + (2\,002 + 14) =$
   b) $(998 + 115) + (2\,002 + 115) =$
   c) $(998 + 333) + (2\,002 + 115) =$

61. $\underline{3\,900 + 4\,915 = 8\,815}$

a) 3 903 + 4 918 =
b) 3 909 + 4 924 =
c) 3 910 + 4 925 =

62. 4 799 + 3 611 = 8 410
a) (4 799 − 54) + (3 611 − 54) =
b) (4 799 − 45) + (3 611 − 45) =
c) (4 799 − 1 000) + (3 611 − 1 000) =

63. 3 786 + 916 = 4 702
a) 3 786 + 616 =
b) 3 736 + 866 =
c) 3 785 + 915 =

64. 46 + 136 = 182
a) (46 + 3) + (136 + 1) =
b) (46 + 2) + (136 + 3) =
c) (46 + 1) + (136 + 3) =

65. 183 + 191 = 374
a) 185 + 194 =
b) 193 + 195 =
c) 187 + 201 =

66. 76 + 189 = 265
a) (76 − 2) + (189 − 3) =
b) (76 − 1) + (189 − 2) =
c) (76 − 2) + (189 − 1) =

67. 397 + 184 = 581
a) 387 + 183 =
b) 297 + 174 =
c) 396 + 174 =

68. 597 + 486 = 1 083
a) (597 + 5) + (486 − 4) =
b) (597 − 5) + (486 + 4) =
c) (597 + 1) + (486 − 2) =

69. 1 609 + 896 = 2 505
a) 1 608 + 898 =
b) 1 617 + 893 =
c) 1 709 + 696 =

70. 938 + 9 986 = 10 924
a) (938 + 6) + (9 986 − 6) =
b) (938 + 37) + (9 986 − 37) =
c) (938 − 248) + (9 986 + 248) =

71. 1 892 + 729 = 2 621
a) 1 894 + 727 =
b) 1 882 + 739 =

c) 1 792 + 829 =

72. <u>11 002 – 398 = 10 604</u>
a) (11 002 + 10) – 398 =
b) (11 002 + 344) – 398 =
c) (11 002 + 1) – 398 =

73. <u>3 007 – 19 = 2 988</u>
a) 3 010 – 19 =
b) 3 107 – 19 =
c) 3 008 – 19 =

74. <u>9 032 – 2 927 = 6 105</u>
a) (9 032 – 32) – 2 927 =
b) (9 032 – 5) – 2 927 =
c) (9 032 – 1 000) – 2 927 =

75. <u>8 146 – 987 = 7 159</u>
a) 8 145 – 987 =
b) 8 136 – 987 =
c) 8 046 – 987 =

76. <u>501 – 36 = 465</u>
a) 501 – (36 + 1) =
b) 501 – (36 + 10) =
c) 501 – (36 + 100) =

77. <u>712 – 385 = 327</u>
a) 712 – 386 =
b) 712 – 395 =
c) 712 – 485 =

78. <u>1 000 – 786 = 214</u>
a) 1 000 – (786 – 1) =
b) 1 000 – (786 – 10) =
c) 1 000 – (786 – 100) =

79. <u>3 101 – 1 809 = 1 292</u>
a) 3 101 – 1 808 =
b) 3 101 – 1 799 =
c) 3 101 – 1 709 =

80. <u>3 102 – 983 = 2 119</u>
a) (3 102 + 2) – (983 + 2) =
b) (3 102 + 2) – (983 + 20) =
c) (3 102 + 200) – (983 + 200) =

81. <u>2 033 – 637 = 1 386</u>
a) 2 024 – 638 =
b) 2 033 – 647 =
c) 3 023 – 1 637 =

82. <u>1 713 – 824 = 889</u>

a) $(1\ 713-3)-(824-3)=$
b) $(1\ 713-30)-(824-30)=$
c) $(1\ 713-300)-(824-300)=$

83. $\underline{9\ 100-7\ 888=1\ 212}$
a) $9\ 099-7\ 887=$
b) $9\ 000-7\ 788=$
c) $8\ 100-6\ 888=$

84. $\underline{1\ 114-367=747}$
a) $(1\ 114+1)-(367-1)=$
b) $(1\ 114+40)-(367-40)=$
c) $(1\ 114+100)-(367-100)=$

85. $\underline{2\ 100-791=1\ 309}$
a) $2\ 101-790=$
b) $2\ 110-781=$
c) $2\ 200-691=$

86. $\underline{6\ 106-3\ 207=2\ 899}$
a) $(6\ 106-1)-(3\ 207+1)=$
b) $(6\ 106-100)-(3\ 207+100)=$
c) $(6\ 106-1\ 000)-(3\ 207+1\ 000)=$

87. $\underline{6\ 847-1\ 978=4\ 869}$
a) $6\ 846-1\ 979=$
b) $6\ 837-1\ 988=$
c) $5\ 847-2\ 978=$

88. $\underline{162-86=76}$
a) $(162+1)-(86-2)=$
b) $(162+3)-(86-1)=$
c) $(162+4)-(86-3)=$

89. $\underline{917-179=738}$
a) $918-176=$
b) $927-171=$
c) $947-159=$

90. $\underline{2\ 437-978=1\ 459}$
a) $(2\ 437-5)-(978+4)=$
b) $(2\ 437-2)-(978+13)=$
c) $(2\ 437-17)-(978+15)=$

91. $\underline{14\ 766-4\ 367=10\ 399}$
a) $14\ 765-4\ 369=$
b) $14\ 666-4\ 567=$
c) $12\ 766-5\ 367=$

92. $\underline{2\ 306-878=1\ 428}$
a) $(2\ 306+4)-(878+3)=$
b) $(2\ 306+3)-(878+4)=$

c) $(2\ 306+2)-(878+1)=$

93. $\underline{3\ 001-186=2\ 815}$

a) $3\ 002-188=$

b) $3\ 011-187=$

c) $3\ 010-196=$

94. $\underline{1\ 597-999=598}$

a) $(1\ 597-3)-(999-2)=$

b) $(1\ 597-7)-(999-8)=$

c) $(1\ 597-8)-(999-7)=$

95. $\underline{8\ 696-5\ 589=3\ 107}$

a) $8\ 690-5\ 579=$

b) $8\ 496-5\ 489=$

c) $7\ 696-3\ 589=$

96. $\underline{6\times 12=72}$

a) $(6\times 6)\times 12=$

b) $(6\times 36)\times 12=$

c) $6\times(12\times 4)=$

97. $\underline{13\times 24=552}$

a) $26\times 24=$

b) $13\times 48=$

c) $52\times 24=$

98. $\underline{8\ 104\times 8=64\ 832}$

a) $(8\ 104:2)\times 8=$

b) $8\ 104\times(8:2)=$

c) $(8\ 104:4)\times 8=$

99. $\underline{48\times 96=4\ 608}$

a) $12\times 96=$

b) $24\times 96=$

c) $48\times 16=$

100. $\underline{4\times 8=32}$

a) $(4\times 2)\times(8\times 2)=$

b) $(4\times 3)\times(8\times 3)=$

c) $(4\times 5)\times(8\times 5)=$

101. $\underline{9\times 6=54}$

a) $36\times 24=$

b) $90\times 60=$

c) $72\times 48=$

102. $\underline{174\times 126=21\ 924}$

a) $(174:2)\times(126:2)=$

b) $(174:3)\times(126:3)=$

c) $(174:6)\times(126:6)=$

103. $\underline{186\times 78=14\ 508}$

a) 62 × 26 =
b) 93 × 39 =
c) 31 × 13 =

104. 6 × 8 = 48
a) (6 × 2) × (8 × 4) =
b) (6 × 3) × (8 × 2) =
c) (6 × 2) × (8 × 3) =

105. 36 × 24 = 864
a) 72 × 72 =
b) 108 × 48 =
c) 144 × 72 =

106. 4 788 × 1 872 = 8 963 136
a) (4 788 : 4) × (1 872 : 2) =
b) (4 788 : 2) × (1 872 : 3) =
c) (4 788 : 3) × (1 872 : 2) =

107. 3 699 × 1 872 = 6 924 528
a) 1 233 × 936 =
b) 411 × 624 =
c) 137 × 468 =

108. 2 024 × 4 048 = 8 193 152
a) (2 024 × 4) × (4 048 : 4) =
b) (2 024 : 8) × (4 048 × 8) =
c) (2 024 : 2) × (4 048 × 2) =

109. 324 × 228 = 73 872
a) 81 × 912 =
b) 108 × 684 =
c) 668 × 114 =

110. 28 × 36 = 1 008
a) (28 × 4) × (36 : 2) =
b) (28 : 2) × (36 × 6) =
c) (28 × 2) × (36 : 4) =

111. 324 × 288 = 93 312
a) 36 × 864 =
b) 648 × 48 =
c) 81 × 576 =

112. 37 × 12 = 444
a) (37 + 10) × 12 =
b) (37 + 5) × 12 =
c) 37 × (12 + 6) =

113. 92 × 18 = 1 656
a) 102 × 18 =
b) 92 × 28 =

c) $92 \times 23 =$

114. $\underline{28 \times 43 = 1\ 204}$

a) $(28 - 10) \times 43 =$

b) $28 \times (43 - 10) =$

c) $(28 - 2) \times 43 =$

115. $\underline{394 \times 189 = 74\ 466}$

a) $294 \times 189 =$

b) $394 \times 89 =$

c) $384 \times 189 =$

116. $\underline{120 : 4 = 30}$

a) $(120 \times 2) : 4 =$

b) $(120 \times 10) : 4 =$

c) $(120 \times 3) : 4 =$

117. $\underline{133 : 19 = 7}$

a) $532 : 19 =$

b) $399 : 19 =$

c) $1\ 064 : 19 =$

118. $\underline{120 : 4 = 30}$

a) $(120 : 2) : 4 =$

b) $(120 : 10) : 4 =$

c) $(120 : 3) : 4 =$

119. $\underline{960 : 24 = 40}$

a) $192 : 24 =$

b) $120 : 24 =$

c) $96 : 24 =$

120. $\underline{120 : 4 = 30}$

a) $120 : (4 \times 3) =$

b) $120 : (4 \times 2) =$

c) $120 : (4 \times 6) =$

121. $\underline{675 : 15 = 45}$

a) $675 : 45 =$

b) $675 : 75 =$

c) $675 : 225 =$

122. $\underline{126 : 18 = 7}$

a) $126 : (18 : 2) =$

b) $126 : (18 : 3) =$

c) $126 : (18 : 9) =$

123. $\underline{432 : 36 = 12}$

a) $432 : 18 =$

b) $432 : 9 =$

c) $432 : 3 =$

124. $\underline{120 : 4 = 30}$

a) (120 × 2) : (4 × 2) =
b) (120 × 10) : (4 × 10) =
c) (120 × 5) : (4 × 5) =

125. 144 : 12 = 12
a) 288 : 24 =
b) 720 : 60 =
c) 1 440 : 120 =

126. 4 944 : 48 = 103
a) (4 944 : 2) : (48 : 2) =
b) (4 944 : 4) : (48 : 4) =
c) (4 944 : 6) : (48 : 6) =

127. 5 040 : 48 = 105
a) 2 520 : 24 =
b) 1 680 : 16 =
c) 840 : 8 =

128. 13 392 : 558 = 24
a) (13 392 × 3) : (558 : 3) =
b) (13 392 × 9) : (558 : 9) =
c) (13 392 × 2) : (558 : 2) =

129. 116 064 : 624 = 186
a) 928 512 : 78 =
b) 464 256 : 156 =
c) 348 192 : 208 =

130. 720 : 4 = 180
a) (720 : 2) : (4 × 2) =
b) (720 : 3) : (4 × 3) =
c) (720 : 6) : (4 × 6) =

131. 471 744 : 504 = 936
a) 157 248 : 1 512 =
b) 235 872 : 1 008 =
c) 78 624 : 3 024 =

132. 2 640 : 24 = 110
a) (2 640 × 4) : (24 : 2) =
b) (2 640 × 3) : (24 : 2) =
c) (2 640 × 2) : (24 : 3) =

133. 110 368 : 388 = 286
a) 220 736 : 97 =
b) 331 104 : 194 =
c) 441 472 : 194 =

134. 10 656 : 24 = 444
a) (10 656 : 2) : (24 × 3) =
b) (10 656 : 6) : (24 × 2) =

c) $(10\ 656 : 3) : (24 \times 2) =$

135. <u>18 816 : 84 = 224</u>

a) 4 704 : 168 =

b) 2 352 : 168 =

c) 9 408 : 336 =

136. <u>21 384 : 594 = 36</u>

a) $(21\ 384 \times 6) : (594 \times 3) =$

b) $(21\ 384 \times 3) : (594 \times 6) =$

c) $(21\ 384 \times 9) : (594 \times 3) =$

137. <u>43 776 : 912 = 48</u>

a) 87 552 : 3 648 =

b) 175 104 : 1 824 =

c) 87 552 : 5 472 =

138. <u>30 752 : 248 = 124</u>

a) (30 752 : 4) : (248 : 2) =

b) (30 752 : 2) : (248 : 4) =

c) (30 752 : 4) : (248 : 4) =

139. <u>3 072 : 384 = 8</u>

a) 384 : 96 =

b) 768 : 192 =

c) 1 536 : 96 =

I. D. Pe baza relațiilor de dependență dintre termeni (factori) și rezultate, determinați, în mai multe moduri, numerele naturale ***a*** și ***b***, distincte între ele și diferite de zero. (Acolo unde este cazul, completați pătratul liber cu semnul operației matematice corespunzătoare).

140. <u>1 009 + 101 = 1 110</u>

a) (1 009 □ *a*) + 101 = 1 111

b) 1 009 + (101 □ *a*) = 1 118

141. <u>329 + 184 = 513</u>

a) (329 □ *a*) + 184 = 504

b) 329 + (184 □ *a*) = 509

142. <u>718 + 6 397 = 7 115</u>

a) (718 □ *a*) + (6 397 □ *a*) = 7 119

b) (718 □ *a*) + (6 397 □ *a*) = 7 135

143. <u>514 + 98 = 612</u>

a) (514 □ *a*) + (98 □ *a*) = 608

b) (514 □ *a*) + (98 □ *a*) = 602

144. <u>103 + 99 = 202</u>

a) (103 + *a*) + (99 + *b*) = 205

b) $(103+b)+(99+a)=208$

145. $\underline{2\ 129+386=2\ 515}$

a) $(2\ 129-a)+(386-b)=2\ 511$

b) $(2\ 129-a)+(386-b)=2\ 510$

146. $\underline{1\ 596+5=1\ 601}$

a) $(1\ 596+a)+(5-b)=1\ 602$

b) $(1\ 596+a)+(5-b)=1\ 599$

147. $\underline{348+169=517}$

a) $(348+a)+(169-a)=b$

b) $(348-a)+(169+a)=b$

148. $\underline{17\ 502-9\ 629=7\ 873}$

a) $(17\ 502 \square a)-9\ 629=7\ 877$

b) $(17\ 502 \square a)-9\ 629=7\ 973$

149. $\underline{21\ 004-7\ 597=13\ 407}$

a) $(21\ 004 \square a)-7\ 597=13\ 403$

b) $(21\ 004 \square a)-7\ 597=12\ 407$

150. $\underline{2\ 907-989=1\ 918}$

a) $2\ 907-(989 \square a)=1\ 917$

b) $2\ 907-(989 \square a)=1\ 908$

151. $\underline{11\ 002-8\ 976=2\ 026}$

a) $11\ 002-(8\ 976 \square a)=2\ 029$

b) $11\ 002-(8\ 976 \square a)=2\ 126$

152. $\underline{1\ 704-925=779}$

a) $(1\ 704+a)-(925+a)=b$

b) $(1\ 704-a)-(925-a)=b$

153. $\underline{1\ 000-3=997}$

$(1\ 000+a)-(3-a)=b$

154. $\underline{3\ 002-1\ 993=1\ 009}$

a) $(3\ 002+a)-(1\ 993-a)=1\ 013$

b) $(3\ 002+a)-(1\ 993-a)=1\ 011$

155. $\underline{17-4=13}$

a) $(17-a)-(4+a)=7$

b) $(17-a)-(4+a)=9$

156. $\underline{12-7=5}$

$(12-a)-(7+a)=b$

157. $\underline{111-77=34}$

$(111-a)-(77+a)=b$

158. $\underline{136-49=87}$

a) $(136+a)-(49-b)=90$

b) $(136+a)-(49-b)=91$

159. $\underline{857-394=463}$

a) $(857-a)-(394+b)=460$

b) $(857-a)-(394+b)=458$

160. $\underline{836-587=249}$

a) $(836+a)-(587+b)=250$

b) $(836+a)-(587+b)=247$

161. $\underline{1\ 003-824=179}$

a) $(1\ 003-a)-(824-b)=178$

b) $(1\ 003-a)-(824-b)=182$

La următoarele exerciții din acest paragraf, impuneți și condițiile: $a>1$ și $b>1$.

162. $\underline{2\times 6=12}$

a) $(2\times a)\times 6=60$

b) $2\times(6\times a)=96$

163. $\underline{12\times 6=72}$

a) $(12 : a)\times 6=18$

b) $12\times(6 : a)=24$

164. $\underline{6\times 9=54}$

a) $(6\times a)\times(9\times a)=216$

b) $(6\times a)\times(9\times a)=486$

165. $\underline{24\times 36=864}$

a) $(24 : a)\times(36 : a)=24$

b) $(24 : a)\times(36 : a)=54$

166. $\underline{8\times 12=96}$

$(8 : a)\times(12 : a)=b$

167. $\underline{7\times 8=56}$

a) $(7\times a)\times(8\times b)=672$

b) $(7\times a)\times(8\times b)=336$

168. $\underline{12\times 14=168}$

a) $(12 : a)\times(14 : b)=28$

b) $(12 : a)\times(14 : b)=6$

169. $\underline{12\times 18=216}$

a) $(12\times a)\times(18 : a)=b$

b) $(12 : a)\times(18\times a)=b$

170. $\underline{4\times 9=36}$

a) $(4\times a)\times(9 : b)=72$

b) $(4 : a)\times(9\times b)=144$

171. $\underline{4\times 8=32}$

a) $(4+a)\times 8=80$

b) $4\times(8+a)=60$

172. $\underline{9\times 6=54}$

a) $(9-a)\times 6=42$
b) $9\times(6-a)=18$
173. $\underline{(7-a)\times 8=b}$
174. $\underline{(7+a)\times 8=b}$
175. $\underline{460 : 23=20}$
a) $(460\times a) : 23=40$
b) $(460\times a) : 23=160$
176. $\underline{4\,536 : 108=42}$
a) $(4\,536 : a) : 108=7$
b) $(4\,536 : a) : 108=3$
177. $\underline{(48 : a) : 8=b}$
178. $\underline{10\,368 : 108=96}$
a) $10\,368 : (108\times a)=32$
b) $10\,368 : (108\times a)=12$
179. $\underline{72 : (4\times a)=b}$
180. $\underline{11\,664 : 324=36}$
a) $11\,664 : (324 : a)=324$
b) $11\,664 : (324 : a)=216$
181. $\underline{48 : (12 : a)=b}$
182. $\underline{25\,536 : 304=84}$
$(25\,536\times a) : (304\times a)=b$
183. $\underline{(39\,168\times a) : (408\times a)=b}$
184. $\underline{(2\,772 : a) : (63 : a)=b}$
185. $\underline{3\,888 : 108=36}$
a) $(3\,888\times a) : (108 : a)=324$
b) $(3\,888\times a) : (108 : a)=2\,916$
186. $\underline{(3\,072\times a) : (64 : a)=b}$
187. $\underline{576 : 8=72}$
a) $(576 : a) : (8\times a)=18$
b) $(576 : a) : (8\times a)=8$
188. $\underline{(36 : a) : (2\times a)=b}$
189. $\underline{1\,392 : 58=24}$
a) $(1\,392\times a) : (58 : b)=192$
b) $(1\,392\times a) : (58 : b)=2\,088$
190. $\underline{336 : 14=24}$
a) $(336 : a) : (14\times b)=4$
b) $(336 : a) : (14\times b)=3$
191. $\underline{648 : 24=27}$
a) $(648\times a) : (24\times b)=54$
b) $(648\times a) : (24\times b)=9$
192. $\underline{1\,176 : 42=28}$
a) $(1\,176 : a) : (42 : b)=14$

b) $(1\ 176 : a) : (42 : b) = 56$

I. E. Folosind procedee de calcul rapid, rezolvați următoarele exerciții; apoi verificați rezultatele efectuînd operațiile prin procedee obișnuite:

193. a) $598+499=$ b) $305+298=$ c) $69+51=$ d) $85+19=$

194. a) $51-8=$ b) $82-28=$ c) $90-21=$ d) $167-59=$

195. a) $846\times19=$ b) $69\times638=$ c) $3\ 698\times81=$ d) $747\times41=$
e) $689\times9=$ f) $586\times99=$ g) $999\times637=$ h) $101\times369=$
i) $1\ 568\times10\ 001=$

196. a) $11\times18=$ b) $36\times11=$ c) $111\times43=$ d) $269\times111=$

197. a) $3\ 268\times5=$ b) $5\times791=$ c) $2\ 349\times50=$ d) $50\times396=$
e) $24\ 869\times25=$ f) $25\times968=$ g) $998\times75=$ h) $317\times75=$
i) $9\ 326\times125=$ j) $125\times438=$ k) $3\ 148\times15=$ l) $15\times739=$

198. a) $185 : 5=$ b) $305 : 5=$ c) $775 : 25=$ d) $1\ 950 : 25=$
e) $2\ 750 : 50=$ f) $13\ 900 : 50=$

199. a) $5\times22=$ b) $45\times8=$ c) $65\times4=$

200. a) $224 : 32=$ b) $256 : 64=$ c) $1\ 280 : 160=$

I. F. Operînd cu numărul **4**, obțineți[1] alte patru egalități cu numere naturale din fiecare dintre egalitățile date în exercițiile **201 – 222**.

201. $16=16$

202. $32y=32y$

203. $8+40=32+16$

204. $4+12+28=20+16+8$

205. $48-32=32-16$

206. $88-16-8=124-36-24$

207. $1\ 004+96-120=600-420+800$

208. $4\times7=14\times2$

209. $16-4\times3=12\times16-188$

210. $352 : 8-12=96-768 : 12$

211. $4a+8a+104a=32a+24a+60a$

212. $120x-80x=12x+28x$

213. $1\ 036y+1\ 024y-996y=10\ 000y-9\ 888y+952y$

214. $420+5\times2\times16y=160y+105\times4$

215. $90y+32=5\times4\times4y+8\times14$

216. $720y : 8+64=140y-36$

217. $48b-4=3\times6b+4\times14$

---

1 Elevii claselor a III-a – a IV-a sînt obligați să aplice aceste proprietăți (fără să le fi însușit), mai ales în problemele de comparație prin scădere (egalarea datelor), în unele probleme de sumă și diferență cu 3 mărimi, cît și în exercițiile asemănătoare cu exercițiul nr. 214.

În clasa a V-a, manualul nu prevede nici un astfel de exercițiu, deși regulile sînt date. Pe baza acestor proprietăți și a relațiilor dintre termeni (factori) și rezultate se rezolvă exercițiile cu x (ecuațiile).

218. $36b-24=2\times4\times9b-4\times96$
219. $8x-28=4x+4$
220. $32x : 2+4=20x-60$
221. $64x-140=112x : 2+4$
222. $512 : (4x)+24=8\times9-32$
223. Determinați numărul necunoscut din exercițiile **202 – 222**.
224. Operînd simultan cu egalitățile $16+24=88-48$ și $2\times4=8$, obțineți alte patru egalități.
225. Rezolvați problemele următoare și veți constata că puteți aplica unele reguli folosite în rezolvarea exercițiilor anterioare:

a) Trei frați au împreună **425** lei. Cîți lei are fiecare dintre ei, dacă primul și al doilea au împreună **265** lei, iar ultimii doi au împreună **365** lei?

(*Matematica*, manual pentru clasa a IV-a, pag. **170**)

b) Bunicul are păsări de curte: găini, rațe și curci. Știind că sînt **32** de rațe și găini la un loc, rațele și curcile la un loc sînt **10**, iar curcile împreună cu găinile sînt în număr de **28**, aflați cîte păsări de fiecare fel are bunicul.

c) Într-o zi, **8** băieți și **14** fete au recoltat **620** kg de morcovi. În altă zi, **8** băieți și **4** fete au recoltat **320** kg de morcovi. Cîte kilograme de morcovi a recoltat în medie pe zi o fată și cîte kilograme un băiat?

(*Matematica*, manual pentru clasa a IV-a, pag. **176**)

d) Pentru completarea necesarului de rechizite școlare, Florina calculează: „Dacă aș cumpăra **3** truse cu creioane și **2** caiete, aș cheltui **900** lei. Dacă, în loc de o trusă, aș mai cumpăra un caiet, aș mai cheltui încă **100** lei”. Cît costă o trusă? Dar un caiet?

(*Matematica*, manual pentru clasa a IV-a, pag. **185**, enunț modificat)

e) **3** grinzi de brad și **4** grinzi de stejar cîntăresc **3 436** kg. Cîte kilograme cîntăresc **8** grinzi de stejar și **6** grinzi de brad?

f) **4** l de ulei și **3** kg de zahăr costă ***a*** lei. Cîți lei costă **2** l de ulei și $1\frac{1}{2}$ kg de zahăr?

I. G. Operînd cu numărul **3**, obțineți alte **4** inegalități cu numere naturale din fiecare dintre inegalitățile date în exercițiile **226-234**.
226. $9<12$
227. $36>18$
228. $24\leq33$
229. $84\geq54$
230. $6a+18<75$
231. $180-6a>9a+150$
232. $3a+9\leq6a+3$
233. $6a+48\geq18a-12$
234. $111>27a+3$
235. Determinați numărul natural ***a*** din exercițiile **230-234**.

În problemele următoare puteți aplica reguli folosite în rezolvarea exercițiilor anterioare.

236. a) Aflați care numere de două cifre adunate cu 4 dau un număr mai mic decît 19.

b) Aflați numerele care scăzute din 63 dau un număr mai mare decît 57.

c) Din care numere scădem 13 ca să obținem cel mult 18?

d) Aflați numerele naturale care scăzute din 20 dau un rezultat cel mult egal cu 20, dar nu mai mic decît 17.

e) Determinați numerele naturale din care dacă scădem 12 obținem cel puțin 6, dar cel mult 15.

f) Determinați numerele naturale care adunate cu 30 să dea cel puțin 30, dar nu mai mult decît 32.

g) Care numere scăzute din 121 dau ca rezultat un număr natural mai mic decît 121, dar cel puțin egal cu 11?

h) Determinați numerele naturale care înmulțite cu 8 dau cel puțin 8, dar cel mult 72.

i) Care numere naturale împărțite la 9 dau un rezultat cel puțin egal cu 3, dar nu mai mare decît 7?

j) Dacă se împarte numărul 24 la un număr natural se obține un cît cel mult egal cu 12, dar distinct de 1. Aflați acel număr natural. Este o soluție unică?

I. H.

237. Se știe că $a+b=32$. Calculați $(60+b)+a$.

238. Se știe că $a+b=3$. Calculați $(2+a)+b$.

239. Se știe că $18+a=20$. Calculați $18+(a+5)$.

240. Se știe că $x+100=200$. Calculați $(200+100)+x$.

241. Se știe că $20+x=35$. Calculați $20+(x+19)$.

242. Se știe că $a\times b=200$. Calculați $(4\times a)\times b$.

243. Se știe că $a\times 7=91$. Calculați $(8\times 7)\times a$.

244. Se știe că $9\times a=630$. Calculați $(9\times 7)\times a$.

245. Se știe că $a\times 10=130$. Calculați $a\times(5\times 2\times 10)$.

246. Se știe că $a\times b=96$ și $a\times c=120$.

247. Știind că $zu=98$ și $zy=140$, calculați $z\times(u+y)$.

248. Știind că $ab=288$ și $ac=120$, calculați $a\times(b-c)$.

249. Știind că $m\times n=128$ și $m\times p=48$, calculați $m\times(n-p)$.

250. Se știe că $x=8$ și $y+z=23$. Calculați $xy+xz$.

251. Se știe că $b+c=19$ și $a=18$. Calculați $ab+ac$.

252. Știind că $y-z=3$ și $x=14$, calculați $xy-xz$.

253. Știind că $a=80$ și $b-c=5$, calculați $ab-ac$.

254. Știind că $xy+xz=476$, calculați $2x\times(y+z)$.

255. Dacă $ab+ac=285$, calculați $(b+c)\times 3a$.

256. Se știe că $xy-xz=26$. Calculați $5x\times(y-z)$.

257. Se știe că $ab - ac = 64$. Calculați $(b - c) \times a : 8$.

258. Se știe că $ab = 608$ și $ac = 416$. Calculați $a(b + c) : 4$ și $a(b - c) : 6$.

259. Determinați numerele naturale consecutive pare a, b și c, știind că $ac - ab = 32$.

260. Determinați numerele naturale b și c, știind că $ab + ac = 252$, $a = 21$, iar b este dublul lui c.

261. Știind că $xy + xz = 168$, iar x este un număr prim și par, calculați:

a) $x + y + z =$ b) $x + 2y + 2z =$
c) $4x + 4y + 4z =$ d) $10x + y + z =$
e) $x(y + z) \times 7 =$ f) $(y + z) : x =$

262. Fie numerele naturale a, b, c și d, distincte de zero. Calculați:

a) $(ab + ac) : (b + c) : a =$
b) $(ab - ac) : (b - c) : a =$
c) $(\overline{abcd} + \overline{abc} - \overline{bcd} - \overline{bc}) : \overline{aa} =$
d) $(\overline{abcd} - \overline{bcd}) : \overline{a0} - (\overline{bcd} - \overline{cd}) : b =$

263. Scrieți ca adunare repetată:

a) $5 \times 8 =$ b) $6b =$
c) $ab =$

264. Puneți semnul de relație fără să efectuați operațiile date:

a) 4×7 □ 6×4;

b) $8 + 8 + 8 + 8 + 8$ □ 4×8;

c) $2a$ □ $3a$;

265. Determinați numerele naturale x și y din:

a) $(x + 3) \times (y - 2) = 12$
b) $(x + 1) \times (y + 4) = 16$
c) $(x - 7) \times (y + 7) = 14$
d) $(x - 10) \times (10 - x) = y$

266. Puneți semnul de relație fără a calcula înmulțirile date, ci efectuînd operațiile ce rezultă din scrierea unora dintre factori ca sume:

a) 9×8 □ 12×6;

b) 2×6 □ 3×4.

267. Puneți semnul $>$, $<$ sau $=$ știind că fiecare membru din relația de mai jos are ca rezultat un număr natural:

$(a - 8) \times (8 - a) \times 8$ □ $(8 - a)(a - 8) + 8$

268. Aflați numărul natural a din:

a) $a \times a + a \times a = 18$;
b) $a \times a \times a + a \times a \times a = 54$;
c) $1 \times 2 \times 3 \times a \times 4 = 4 \times 3 \times 3 \times 2$;
d) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 8 \times 9 = 1 \times a \times 8 \times 8 \times 9$;
e) $1 \times 2 \times 3 \times a \times 100 = 100 \times 2 \times 1 \times a \times 3$;

f) $a : a + a - a : a = 100$, $a \neq 0$;
g) $a : b \times b - a \times b : b + a \times b : b + a = 100$, $a > b \neq 0$;
h) $a : a : 2 + a : a : 4 + a : a : 4 = a$, $a \neq 0$;
i) $a : a : 2 + a : a : 2 + a = 2$, $a \neq 0$;
j) $\overline{1a} = 3a$;
k) $6a = \overline{3a}$;
l) $\overline{2a} = 6a$;
m) $6a = \overline{1a}$.

269. Aflați în cîte cifre identice alăturate se termină produsul primelor **25** de numere naturale nenule.

270. Determinați trei numere naturale știind că produsul primelor două este **12**, suma dintre primul și al treilea este **10**, iar produsul ultimelor două numere este **28**.

271. Motivați scrierea generalizată a unui număr par, apoi a unui număr impar.

272. Ținînd seama de condiția restului, scrieți toate formele numărului natural a care a fost împărțit la: **3**; **4**; **5**.

273. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr par. Cel mai mare dintre ele este număr par sau impar?

274. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr impar. Cel mai mic dintre ele este un număr par sau impar?

275. Determinați numerele naturale a din următoarele scrieri:
a) $a : (72 : 9) = 3$;
b) $4 \times 9 : a = 6$;
c) $a \times (42 : 7 : 3) \times 8 = 32$;
d) $a : 8 = 6$ (rest **5**);
e) $a : 3 = 8$ (rest $\neq 0$);
f) $a : 7 = 9$ (rest mai mic decît **1**);
g) $a : 9 = 7$ (rest mai mare decît **6**);
h) $37 : a = 9$ (rest **1**);
i) $26 : a = 3$ (rest mai mic decît **6**);
j) $19 : a = 2$ (rest mai mare decît **1**);
k) $6 : a = 1$ (rest r);
l) $a : 4 = c$ (rest egal cu c);
m) $a : 3 = c$ (rest mai mic de **3** ori decît c);
n) $a : 10 = c$ (rest mai mare de **4** ori decît c);
o) $a : 7 = c$ (rest mai mare cu **2** decît c);
p) $a : 3 = c$ (rest mai mic cu **2** decît c).

276. Determinați cel mai mare număr natural care împărțit la **1 994** să dea un cît:
a) de **8** ori mai mare decît restul;
b) de **8** ori mai mic decît restul.

277. La un concurs de matematică, clasa noastră a fost reprezentată de trei elevi

care s-au clasat pe locuri diferite, în primii 5, fiind toți premiați cu sume de bani. Știind că produsul dintre valoarea premiului (număr natural) și locul obținut este același pentru toți trei elevii, iar suma acestor produse este 20 475, aflați locul ocupat de fiecare reprezentant al clasei noastre.

278. a) Găsiți toate perechile de numere naturale (a, b), știind că $2a+3b=12$.

b) Aflați ultima cifră a rezultatelor din următoarele exerciții:

1) $3\times4+105\times2+3\times11=$
2) $210a+10\times2+2=$
3) $\overline{ab4}\times6+\overline{9b3}\times7+\overline{ab5}\times1=$
4) $\overline{ab}\times5+\overline{ab2}\times5=$
5) $10\times10\times\overline{ab}+4\times\overline{ab5}\times9=$
6) $\overline{aa5}-3\times9=$
7) $\overline{aa1}-\overline{c6}-\overline{d4}=$
8) $\overline{a2}\times2\times\overline{\cdot\cdot2}=$
9) $\overline{a7}\times\overline{a7}\times\overline{a7}\times7=$
10) $3\times\overline{a3}\times\overline{a3}\times3\times3=$

c) Determinați numerele naturale a, b, c și d, știind că sînt mai mici decît 10, sînt distincte între ele și diferite de zero:

1) $500a+100b+15c+2d=753$;
2) $112a+22b+13c=195$;
3) $1\,000a+200b+30c+4d=1\,986$;
4) $200b+1\,010c+10\,001d+1\,011a=81\,111$;
5) $26a=6b+7c$;
6) $81a-101b-101c=1$;
7) $a-b-c=6$;
8) $a-b-3c=2$;
9) $11a+2b=101$;
10) $100\,\overline{ab}-99-\overline{ab}=1\,089$.

279. Cristi a cumpărat de la un chioșc 4 kg de castraveți, cîțiva știuleți de porumb cu 58 lei bucata și 2 legături de pătrunjel. Fără să fi făcut calculul, el i-a răspuns vînzătorului că a greșit dacă trebuie să plătească o sumă terminată în 5. De unde și-a dat seama Cristi de acest fapt?

280. Aflați cele trei numere naturale consecutive, știind că:

a) suma lor este cu 109 mai mare decît unul dintre ele. Cîte soluții sînt?

b) unul dintre ele este cu 98 mai mic decît suma lor.

281. La împărțirea numărului natural a la un număr natural b, obținem cîtul q și restul r. Care este cîtul și restul împărțirii lui $2a$ la $2b$?

282. Avînd de aflat restul împărțirii 23 000 : 6 000, cei doi colegi, Camelia și Dinu, au răspuns diferit. Camelia a răspuns că restul este 5, procedînd

astfel: 23 000 : 6 000 = 3 (rest 5). Dinu a indicat alt rest. Cine are dreptate? Justificați!

283. Calculați în două moduri:

a) 64 : 8 + 24 : 8 =

b) 36 : 9 + 54 : 9 =

c) 56 : 7 + 28 : 7 =

d) 30 : 6 + 24 : 6 =

e) 63 : 9 − 27 : 9 =

f) 56 : 8 − 32 : 8 =

284. Fie numerele naturale $a \in \{71;73\}$, $b = 55$ și $c = 9$. După ce efectuați $a : c$, $b : c$ și $(a+b) : c$, generalizați condițiile în care $a+b$ se împarte exact la un număr c, știind că $a = cq + r_1$ și $b = cd + r_2$.

285. Fie numerele naturale $a \in \{56;57\}$, $b = 38$ și $c = 6$. După ce efectuați $a : c$, $b : c$ și $(a-b) : c$, generalizați condițiile în care $a-b$ se împarte exact la un număr c, știind că $a = cq + r_1$ și $b = cd + r_2$.

286. După ce efectuați 72 : 7, calculați direct cîtul și restul la următoarele împărțiri, fără a efectua operațiile din paranteză, apoi verificați și generalizați: (72 + 14) : 7; (72 + 21) : 7; (72 − 14) : 7; (72 − 21) : 7.

287. Să se efectueze 102 × 6. Cu ajutorul rezultatului găsit, aflați cîtul și restul la următoarele împărțiri: a) 714 : 102; b) 614 : 102; c) 916 : 102; d) 510 : 102; e) 610 : 102; f) 926 : 102; g) 296 : 102;

288. Cîte numere sînt:

a) de la 1 la 8; b) de la 2 la 8; c) între 1 și 8; d) între 2 și 8; e) de la 2 × 3 la 2 × 8; f) între 2 × 3 și 2 × 8; g) de la 89 × 91 la 90 × 91; h) între 89 × 91 și 90 × 91; i) cel puțin egale cu 4 × 5, dar mai mici decît 4 × 9; j) cel puțin egale cu 4 × 5 și cel mult egale cu 4 × 9; k) mai mari decît 2 × 3 și mai mici decît 2 × 8; l) între 16 : 2 și 24 : 2; m) de la 20 : 4 la 32 : 4.

289. Cîte numere impare sînt:

a) de la 1 la 20; b) de la 4 la 33; c) de la 1 la 31; d) de la 15 la 75.

290. Cîte numere pare sînt:

a) de la 6 la 81; b) de la 9 la 40; c) de la 1 la 60; d) de la 8 la 84.

291. Cîte perechi care să aibă aceeași sumă se pot forma cu numerele:

a) de la 1 la 70; b) de la 3 la 85; c) de la 8 la 94; d) de la 7 la 36; e) de la 6 la 51.

292. Cîte perechi, care să aibă aceeași sumă, se pot forma cu numerele: a) pare de la 1 la 80; b) impare de la 1 la 80; c) pare de la 3 la 85; d) impare de la 3 la 85; e) pare de la 8 la 94; f) impare de la 8 la 94; g) pare de la 7 la 36; h) impare de la 7 la 36; i) pare de la 6 la 51; j) impare de la 6 la 51.

293. a) Se consideră două șiruri de numere, ca în desenul de mai jos, în care săgețile indică corespondența, număr cu număr, dintre acestea:

1	2	3	4	.	.	99	100
↓	↓	↓	↓			↓	↓
100	99	98	97	.	.	2	1

Ce număr îi corespunde lui 53? Dar lui 68?

b) Cîte numere naturale mai mici decît 1000 putem pune în locul lui *y* din fiecare exercițiu de mai jos, astfel încît fiecare cît obținut să fie număr natural:

1) $(y+2) : 2 =$ 2) $(y+1) : 2 =$ 3) $(y+5) : 2 =$ 4) $(y+4) : 2 =$

294. Care numere naturale putem pune în locul lui *y* pentru a obține ca rezultat un număr natural:

a) $100 : (y+1) =$ b) $100 : (y+2) =$

295. Scrieți cel mai mare număr impar de două cifre cu cifra zecilor mai mică decît cifra unităților.

296. Cu cît este mai mic cel mai mic număr de trei cifre identice decît cel mai mare număr de trei cifre diferite?

297. Aflați suma a trei numere naturale consecutive dacă unul dintre ele este 101.

298. Aflați suma a patru numere consecutive pare, dacă unul dintre ele este 1 002.

299. Scrieți numărul 33 ca o sumă de termeni al căror produs să fie tot 33.

300. Aflați suma cifrelor numărului natural ce poate fi scris astfel: $\underbrace{(2\times5)\times(2\times5)\times\ldots\times(2\times5)}_{n \text{ factori}}\times3+2$, în care $n\neq0$.

301. Să se afle cel mai mare, apoi cel mai mic număr de 100 de cifre care are 20 cifre de 1.

302. Să se determine numărul natural *y*, cunoscînd că:

a) $y+2$ este predecesorul numărului 17;
b) $y+2$ este precedentul numărului 10;
c) $y+2$ este succesorul numărului 17;
d) $y+2$ este consecutivul numărului 10;
e) $y+2$ este consecutivul par al numărului 14;
f) $y+2$ este precedentul impar al numărului 9;
g) $y+2$ este consecutivul impar al numărului 9.

303. Aflați numărul natural *a* din: $91+a\times(1+2+3+\ldots+90)=91\times91$.

304. Calculați:

$(2+4+6+\ldots+1\,000-1-3-5-\ldots-999) : [(2+4+6+\ldots+100-1-3-5-\ldots-99)\times(2+4+6+8+10-1-3-5-7-9)]=$

305. Aflați un număr natural știind că:

a) dacă îl adunăm cu jumătatea sa și cu sfertul său, obținem 14;
b) dacă din dublul său scădem jumătatea sa, obținem 3;

c) dacă din dublul numărului scădem sfertul lui, obţinem **7**;
d) dacă din dublul său scădem îndoitul jumătăţii sale, obţinem **2**;
e) dacă la dublul său adunăm dublul sfertului său, obţinem **10**;
f) dacă la doimea sa adunăm dublul jumătăţii sale, obţinem **3**;
g) dacă la sfertul lui adunăm triplul sfertului său, obţinem **4**;
h) dacă la triplul sfertului său adunăm jumătatea sa, obţinem **5**;
i) dacă din triplul său scădem întreitul jumătăţii sale, obţinem **3**;
j) dacă din triplul jumătăţii sale scădem dublul sfertului său, obţinem **4**;
k) triplul său este cu **10** mai mare decît dublul său;
l) jumătatea sfertului său este **8**;
m) jumătatea jumătăţii sale este **4**.

306. Să se afle numerele naturale a, b şi c, ştiind că $a+b+c=11$, $ab+bc=10$ iar $a=2c+1$.

307. Să se determine numărul natural de forma $\overline{abc}$, ştiind că
$\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}+a+b+c=342$

308. Să se determine numerele naturale ce constituie primul membru în egalităţile de mai jos (a se vedea şi ex. **I.24** – **I.41** din vol. **1**):

a) $\overline{ab}=5(a+b)$;
b) $\overline{ab}=6(a+b)$;
c) $\overline{ab}=7(a+b)$;
d) $\overline{ab}=8(a+b)$;
e) $\overline{ab}=9(a+b)$;
f) $\overline{abc}=11(a+b+c)$;
g) $\overline{abc}=13(a+b+c)$;
h) $\overline{abc}=14(a+b+c)$;
i) $\overline{abc}=5\cdot\overline{bc}$;
j) $\overline{abc}=6\cdot\overline{bc}$;
k) $\overline{abc}=6\cdot\overline{ac}$;
l) $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=1506$;
m) $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{bac}=900$;
n) $\overline{xyz}=\overline{xx}+\overline{yy}+\overline{zz}$;
o) $\overline{xy}:21=x-y$;

309. Să se determine numărul natural de forma $\overline{xyz}$, ştiind că $7x+5y-z=8$ şi $y+z=11$.

310. Să se determine numerele naturale a şi b din:
1) $a+ab=7$;
2) $b+ab=3$.

311. a) Aflați cel mai mic și cel mai mare număr de **3** cifre care împărțite la **8** dau un cît și restul **6**.
b) Cîte numere de **3** cifre împărțite la **8** dau restul **6**?

312. a) Aflați cel mai mic și cel mai mare număr de **4** cifre care la împărțirea cu **39** să dea restul **16**.
b) Aflați suma numerelor de **4** cifre care împărțite la **39** dau restul **16**.

313. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, unde *b* nu este neapărat distinct de *a*, care la împărțirea cu **15** dau restul **6**.

314. La o împărțire de numere naturale se știe că deîmpărțitul este **142**, restul este **10**, iar cîtul este mai mare decît împărțitorul. Care este acea împărțire?

315. Să se găsească două numere naturale astfel încît înmulțind de **4** ori primul număr cu dublul celui de-al doilea să se obțină **224**, iar dublul primului număr să fie cu **1** mai mare decît al doilea număr.

316. Suma a **3** numere naturale diferite este **24**. Știind că primul dintre ele este media aritmetică a celorlalte două și că fiecare se împarte exact la **4**, să se afle cele trei numere.

317. Determinați cele două numere naturale care împărțite dau cîtul **9** și un rest strict mai mare decît **6**, dar cu **80** mai mic decît suma dintre deîmpărțit și împărțitor.

318. Aflați trei numere consecutive, știind că suma ultimelor două este triplul primului număr.

319. **10** băieți și **11** fete au strîns împreună **272** kg de fructe de pădure. Cu cîte kilograme au strîns mai mult băieții decît fetele? Are mai multe soluții problema?

320. În anul **1 960**, cei patru prieteni, Alin, Barbu, Costel și Didel, au constatat că:
a) vîrsta lui Alin era reprezentată de numărul format de ultimele două cifre ale anului său de naștere;
b) vîrsta lui Barbu era reprezentată de dublul numărului format de ultimele două cifre ale anului său de naștere;
c) vîrsta lui Costel era reprezentată de triplul numărului format de ultimele două cifre ale anului său de naștere;
d) vîrsta lui Didel era reprezentată de împătritul numărului format de ultimele două cifre ale anului său de naștere. Știind că toți s-au născut după anul **1 901**, aflați anul de naștere al fiecăruia dintre cei patru prieteni.

321. În anul **1 971**, trei frați au constatat că fiecare are vîrsta egală cu dublul sumei cifrelor anului său de naștere. Cîți ani a împlinit fiecare în **1 971** și în ce an s-a născut?

322. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că

$$2(\overline{ab}+\overline{ba}) : (a+b)\times\overline{ab}=308.$$

323. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că:

a) $(\overline{ab}-7)\cdot(\overline{ab}-6)\cdot(\overline{ab}-5)=6\cdot7\cdot5$;

b) $(\overline{ab}-11)\cdot(\overline{ab}-10)\cdot(\overline{ab}-9)=3\cdot2$;

c) $(\overline{ab}-18)\cdot(\overline{ab}-16)\cdot(\overline{ab}-17)=60$.

324. Produsul a două numere consecutive este 156. Aflați numerele.

325. Dacă la un număr natural de două cifre adunăm 5, iar rezultatul îl împărțim la 6, obținem același număr ca atunci cînd din numărul dat scădem 6, iar diferența o împărțim la 5. Aflați numărul.

326. Să se determine numărul natural $\overline{ab}$, știind că $a+b=11$, iar cîtul împărțirii cu rest a lui a la b este 4.

327. Știind că $\overline{af}+\overline{eb}=\overline{ch}+\overline{gd}=99$, calculați: $\overline{abcd}+\overline{efgh}$.

328. Știind că $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2167$ și $c+d=7$,

calculați: $\overline{abcd}:1952$.

329. Știind că $\overline{abab}-\overline{baba}=909$, calculați $\overline{abab}:101$.

330. Știind că $\overline{abcd}-\overline{abc}-\overline{ab}-d=1264$, iar $\overline{abcd}:16=q$ (rest 0), determinați $\overline{abcd}$.

331. Știind că $7\cdot\overline{aaa}=\overline{caaa}-c$, să se calculeze $\overline{ac}:32$.

332. Dacă $\overline{xyztu}:4=\overline{utzyx}$, calculați: $(\overline{xyztu}+\overline{utzyx}):10989$, literele notînd cifre distincte.

333. Să se determine cel mai mic număr de forma $\overline{abcd}$ cu cifre distincte, dacă:

1) $\overline{abcd}:\overline{ab}=q_1,\ q_1\in N$;

2) $\overline{abcd}:\overline{cd}=q_2,\ q_2\in N$.

334. Să se reconstituie împărțirea: $\overline{dcba}:\overline{abcd}=4$.

335. Să se determine numărul natural de forma $\overline{xyz}$, știind că la împărțirea prin 3 se obține cîtul $\overline{yz}$ și restul x.

336. Determinați numărul natural de forma $\overline{abc}$, știind că împărțit la răsturnatul său dă cîtul 5 și restul 36.

337. La înmulțirea a două numere de cîte 3 cifre, un elev a transcris de pe tablă, din greșeală, fiecare cifră a primului factor cu o unitate mai mică și a obținut produsul 15 129 în loc de 28 782. Care era înmulțirea corectă?

338. Avînd de efectuat înmulțirea $\overline{ab}\times\overline{cd}$, un elev a transcris greșit de pe tablă, încît cifrele celui de-al doilea factor au devenit $c+1$ și, respectiv, $d-1$, obținînd astfel produsul 1 495 în loc de 1 288. Care era înmulțirea ce trebuia să o efectueze elevul?

339. Fie 5 numere naturale. Dacă le ordonăm crescător, observăm că fiecare este mai mare decît precedentul cu același număr, iar al treilea este 7.

a) Aflați suma celor 5 numere.

b) Determinați cele 5 numere. Cîte soluții sînt?

340. Dacă un număr natural este adunat cu zecile și cu unitățile sale obținem 182. Care este numărul? Sînt mai multe soluții?

341. Reconstituiți operațiile următoare:

a) $\overline{2a6}+\overline{6b}=\overline{c53}$

b) $\overline{a9b}+\overline{c7}=640$;

c) $\overline{4ab}-\overline{c37}=\overline{d65}$;

d) $\overline{a8b}-\overline{5c6}=85$;

e) $\overline{7aba5}-\overline{2f2c}=\overline{ed089}$;

f) $\overline{6a2a1}-\overline{bcd9e}=809$;

g) $\overline{UNU}+\overline{UN}+\overline{U}=\overline{8U2}$;

h) $\overline{UNU}+\overline{UN}+\overline{U}=\overline{6UN}$;

i) $\overline{SANDA}+\overline{DANA}+\overline{AN}=\overline{DIANA}$;

j) $\overline{PLUS}+\overline{PLUS}+\overline{PLUS}+\overline{PLUS}=\overline{3P*04}$;

k) $\overline{PERELE}+\overline{RELE}+\overline{ELE}+\overline{LE}+\overline{E}=906\,985$;

l) $\overline{aa}+\overline{2b}=\overline{ccc}$;

m) $\overline{aa}+2\cdot\overline{b}=\overline{ccc}$;

n) $\overline{aaa}:b=\overline{bc}$;

342. Reconstituiți adunarea $n=x+y$, știind că $x=\overline{2a7b}$, $y=\overline{51c6}$, iar $n=\overline{8d94}$.

343. Reconstituiți înmulțirile:

1)
```
   36 x
   ab
  ---
  * * *
* * *
-------
1 * * 4
```

2)
```
    ab x
    c2
   ---
   7 *
 * 0 *
-------
 * * * *
```

3)
```
        NOI x
        VOI
       -----
    * * * *
  * * *
 ---------
 Ş A P T E,
```
unde litere distincte notează cifre distincte.

4)
```
      5ab x
      c3d
      ---
    * * 0 *
  * * * 1
  * * *
 ---------
  * * * 1 3
```

5) Determinați numărul $\overline{abcde}$ dacă:

$\overline{abcde}\cdot\overline{yztu}=95713+\overline{******0}+\overline{******00}+\overline{*****000}=\overline{******603}$

6) $\overline{abcba}\cdot 33333=\overline{******085}$

344. Reconstituiți împărțirile:

a) $\overline{6a7b8}:\overline{c7d}=\overline{1fg}$
```
6a7b8 : c7d = 1fg
*7*
----
3*64
*9*8
----
=2*6*
 *9*8
 ----
 ====
```

b) $\overline{abcde}:\overline{g6}=\overline{4zt}$
```
abcde : g6 = 4zt
***
---
==9d
  *2
  ---
  1*e
  *8e
  ---
  ===
```

c) $\overline{dcba} : \overline{abcd} = 4$;

d) $\overline{abc} : \overline{cba} = 2$(rest 100), iar $a-c=4$.

345. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, cu cifre nu neapărat distincte, știind că la împărțirea diferenței dintre acesta și răsturnatul său prin produsul cifrelor sale se obține $a-b$.

346. Care sînt numerele de forma $\overline{abc}$ care au cifra zecilor de patru ori mai mare decît cifra unităților și de 2 ori mai mare decît cifra sutelor?

347. Determinați numărul de forma $\overline{5a}$ care la împărțirea prin 7 dă restul 6.

348. Determinați numărul de forma $\overline{7a}$ care la împărțirea prin 9 dă restul maxim.

349. Determinați numerele naturale care satisfac egalitatea:
$a \cdot b(a+b)=30$.

350. Determinați numărul natural $\overline{aa}$, știind că
$a \times a \times a = a+a+a+a+a+a+a+a+a$.

351. Aflați două numere naturale egale știind că împărțind produsul la suma lor obținem cîtul 14.

352. Găsiți trei numere naturale distincte al căror produs să fie egal cu suma lor.

353. Găsiți nouă numere naturale nu neapărat distincte, care au suma egală cu produsul lor.

354. Găsiți numărul natural a care satisface egalitatea: $a+a=a \times a=a^a$.

355. Arătați că dacă se mărește cu 1 produsul a două numere naturale consecutive pare sau impare se obține pătratul unui număr natural.

356. Să se afle numerele naturale x, y, z, distincte de 1, știind că $xy=21$, $yz=15$, $zx=35$.

357. Determinați numărul $\overline{ab}$, știind că:
$\overline{ab}-2=\overline{cd}$, iar $\overline{cd}=2q$; $\overline{ab}-5=\overline{ef}$; $\overline{ef}=5x$; $\overline{ab}-7=\overline{gh}$; $\overline{gh}=7y$.

358. Să se afle cifrele x și y din: $\overline{xyyy}-\overline{yyyx}=\overline{xxx}$.

359. Suma a două numere este $\overline{aa}$. Aflați numerele dacă:
1) ultima cifră a primului număr este 2, iar al doilea este cu 2 mai mare decît primul;
2) ultima cifră a primului număr este 7, iar al doilea număr este cu 5 mai mare decît primul.

360. Dacă dintr-un număr natural scădem pe 20, pe 19, pe 21 și pe 24, apoi adunăm cele patru resturi obținem o sumă egală cu numărul inițial. Care este acel număr?

361. Să se afle cîte numere naturale mai mici decît 213 există astfel încît, dacă înmulțim pe oricare dintre ele cu 3, obținem un număr cel puțin egal cu 213.

362. La sfîrșitul primului trimestru, cei patru colegi, Diana, Ștefănel, Oana și Dan, au, respectiv, următoarele note la matematică:

1) 7;8;9;8;
2) 9;9;10;8;
3) 8;10;10;8;
4) 10;8;10;10;10

Care dintre ei va avea media trimestrială mai mare la această disciplină? Puteţi calcula în două moduri?

363. În patru grămezi sînt, respectiv, 70 kg, 80 kg, 48 kg şi 42 kg de mere. Cîte kg de mere va conţine unul dintre cele patru coşuri, dacă în fiecare se pune aceeaşi cantitate?

364. Un turist a străbătut distanţa dintre două localităţi astfel: în prima zi 100 km, în a doua 111 km, iar în a treia zi, 95 km. Cîţi km străbate într-o zi un alt turist care a plecat şi a ajuns o dată cu primul, parcurgînd aceeaşi distanţă, dar străbătînd în fiecare zi acelaşi număr de kilometri?

365. Media aritmetică a două numere este 9. Unul dintre numere este 12. Care este celălalt număr?

366. Media aritmetică a trei numere este 18. Al doilea număr este cu 4 mai mare decît primul, dar cu 13 mai mic decît al treilea număr. Să se afle numerele.

367. Trei numere au, două cîte două, media aritmetică respectiv egală cu 21, 22, 25. Care sînt numerele?

368. Arătaţi că media aritmetică a trei numere naturale este un număr natural, dacă:
a) sînt numere consecutive;
b) diferenţa dintre al doilea şi primul număr este egală cu diferenţa dintre al treilea şi al doilea număr.

369. Elena avea la limba română trei note distincte pe baza cărora putea să obţină exact media 7. Ce note avea Elena? Cîte soluţii sînt?

370. Lăsînd neschimbată ordinea cifrelor de mai jos, puneţi între ele semne ale operaţiilor aritmetice în aşa fel încît să se obţină egalităţi adevărate:
a) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 =1;
b) 123456789 =1;

371. Fie cifrele de mai jos. Puneţi între ele semne ale operaţiilor aritmetice şi, la nevoie, paranteze, pentru a obţine pe rînd rezultatele indicate în paranteze:
a) patru cifre de 1 (rezultate: numerele de la 0 la 4);
b) patru cifre de 2 (0;1;2;3;4;5;6;10;12);
c) patru cifre de 3 (numerele de la 0 la 10);
d) patru cifre de 4 (3;6;7;8;24;32);
e) patru cifre de 5 (2;3;5;6;7;9;26;30);
f) patru cifre de 8 (1;2;4;10;15);
g) patru cifre de 9 (1;2;7;8;9;10;19);
h) patru cifre de 6 (1;5;6;8;12;24;30);
i) patru cifre de 7 (1;3;8;13;15).

372. Cu ajutorul a trei cifre de 5 şi două cifre de 1, folosind numai adunarea, obţineţi:

a) printr-un singur mod, sumele: **17**; **35**;
b) prin două moduri, sumele: **26**; **62**;
c) prin trei moduri, suma **71**.

373. Determinați numerele naturale a, b, c, d și e, care satisfac simultan egalitățile:
1) $e+e+e=90-58-e$;
2) $d=e+e$;
3) $d-12=c$;
4) $b=c+6$;
5) $b+b=a$.

374. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$, știind că $(a+b) : b=b$.

375. Aflați două numere naturale știind că ultima cifră a primului număr este **5**, al doilea număr este cu **5** mai mare decît primul număr, iar suma lor este de forma $\overline{aaa}$.

376. Determinați toate numerele naturale de două cifre al căror sfert întrece semiprodusul cifrelor cu un sfert din cifra unităților (G.M. **2-3/1 993**).

377. Dacă $\frac{a}{b}=\frac{6}{5}$, atunci să se arate că egalitatea $\frac{\overline{aa}\cdot b}{a+b}=a\cdot b$ este adevărată (G.M. **2-3/1 993**).

378. Care este valoarea lui a pentru ca fracțiile următoare să fie echiunitare?
1) $\frac{5a-a\cdot 3}{8}$; 2) $\frac{5a+a\cdot 3}{8}$.

379. Care este valoarea minimă a lui a, număr natural, diferit de zero, pentru ca fracțiile să fie, pe rînd, subunitare și supraunitare:
1) $\frac{a-3}{7}$; 2) $\frac{a+3}{7}$; 3) $\frac{a\cdot 3+1}{7}$; 4) $\frac{a:3}{7}$, unde a se împarte exact la **3**, iar $a\geq 3$.

I. Soluții și răspunsuri

Înainte de a rezolva exercițiile date, reamintiți-vă:

1. **adunarea** numerelor naturale este o operație:

a) în care numerele adunate se numesc termeni, iar rezultatul se numește sumă; de exemplu în $a+b=c$, a și b se numesc termeni, iar c se numeșe sumă; tot sumă se numește și expresia $a+b$, adică adunarea neefectuată;

b) comutativă, adică $a+b=b+a$, (∀)[1] $a, b \in \mathrm{N}$;

c) asociativă, adică $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$, (∀) $a, b, c \in \mathrm{N}$;

d) care are ca element neutru zero, adică $a+0=a$ sau $0+a=a$, (∀) $a \in \mathrm{N}$;

2. **scăderea** numerelor naturale este o operație:

a) în care primul termen (din care scădem) se numește descăzut, iar al doilea (termenul pe care îl scădem) se numește scăzător, iar rezultatul se numește diferență (rest); de exemplu în $a-b=c$, a se numește descăzut, scăzătorul este b, iar c se numește diferență; tot diferență se numește și expresia $a-b$, adică scăderea neefectuată;

b) nu întotdeauna posibilă (numai cînd descăzutul este cel puțin egal cu scăzătorul; în $a-b=c$ punem condiția $a \geq b$).

c) care nu este asociativă și nici comutativă, adică $a-b \neq b-a$, iar $(a-b)-c \neq a-(b-c)$;

d) în care nu există element neutru, căci $a-0=a$, dar $0-a \neq a$;

e) definită ca operație inversă adunării, căci $a-b=c$, dacă $a=b+c$, în care $a, b, c \in \mathrm{N}$, iar $a \geq b$; de aceea scăderea se verifică prin adunare;

3. **înmulțirea** numerelor naturale este o operație:

a) în care numerele ce se înmulțesc se numesc factori[2], iar rezultatul se numește produs; de exemplu în $a \times b=c$ (sau $a \cdot b=c$ sau $ab=c$), a și b se numesc factori, iar c este produsul; tot produs se numește și expresia $a \cdot b$, adică înmulțirea neefectuată;

b) este definită ca o adunare a aceluiași termen (adunare repetată), adică $a \times b=\underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{\text{de } a \text{ ori}}$ sau $a \times b=\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{\text{de } b \text{ ori}}$;

dacă adunarea este totdeauna posibilă, rezultă că și înmulțirea este la fel;

---

1 Notația (∀) $a \in \mathrm{N}$ se citește «oricare ar fi a aparținînd mulțimii numerelor naturale».

2 În culegerile vechi, primul factor era denumit deînmulțit, iar al doilea, înmulțitor. Se omitea însă faptul că înmulțirea este comutativă. O definiție discutabilă a operației de înmulțire este și în manualul de matematică pentru clasa a V-a, E.D.P., Buc. 1991, pag. 14.

c) comutativă, adică $a \times b = b \times a$, $(\forall)$ $a, b \in N$;

d) asociativă, adică $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, $(\forall)$ $a, b, c \in N$;

e) care are element neutru 1, adică $a \times 1 = a$ sau $1 \times a = a$, $(\forall)$ $a \in N$;

f) în care zero absoarbe orice element, adică dacă cel puțin unul dintre factori este zero, produsul este tot zero: $a \times 0 = 0 \times a = 0$;

g) distributivă față de adunare și față de scădere, adică:

$a \times (b+c) = (b+c) \times a = a \times b + a \times c$, iar $a \times (b-c) = (b-c) \times a = a \times b - a \times c$, $(\forall)$ $a, b, c \in N$ (relațiile de mai sus, citite de la dreapta la stînga poartă numele de regula factorului comun);

4) **împărțirea** numerelor naturale este o operație:

a) în care numerele ce se împart se numesc termeni; primul termen (pe care îl împărțim) se numește deîmpărțit, iar al doilea (termenul la care împărțim) se numește împărțitor; rezultatul împărțirii se numește cît; orice expresie de forma $a : b$ sau $\frac{a}{b}$ poate fi numită tot cît;

b) definită ca operație inversă înmulțirii, căci $a : b = q$, în care $b \in N^*$, dacă $b \times q = a$ (împărțire exactă: deîmpărțitul este divizibil prin împărțitor); definită ca scădere repetată, în cazul împărțirii întregi (neexacte, cu rest), căci $a : b = q$ (rest r) $\Leftrightarrow a - \underbrace{b - b - b - \ldots - b}_{\text{de } q \text{ ori}}$, rest $r \Leftrightarrow a = b \times q + r$, în care $r < b$; împărțirea exactă este un caz particular al împărțirii cu rest[1], căci la orice împărțire exactă se poate considera restul ca fiind zero, iar relația $a = b \times q + r$ devine $a = b \times q + 0 \Leftrightarrow a = b \times q$;

c) care, în problemele practice, se efectuează prin două procedee:

– împărțirea în părți egale (se știe cîte submulțimi disjuncte și echivalente se pot forma cu elementele unei mulțimi date și se cere numărul de elemente din fiecare submulțime);

– împărțirea prin cuprindere (se știe cîte elemente are fiecare submulțime ce trebuie separată din mulțimea dată și se cere numărul de submulțimi echivalente astfel formate);

d) care are mai multe cazuri particulare:

---

1 De aceea, manualul de matematică pentru clasa a II-a, ediția 1993, prezintă întîi împărțirea exactă, cu cele două procedee practice, tot pe baza scăderii repetate, insistîndu – se ca, la șirul de scăderi repetate, restul să fie zero. În cazul în care deîmpărțitul este mai mic decît împărțitorul, împărțirea exactă este imposibilă (de exemplu $\frac{6}{8} \notin N$), dar împărțirea cu rest este posibilă, căci $6:8=0$, rest $6 \Leftrightarrow 6 = 0 \times 8 + 6$, iar $6:8 = 0,75$; rezultatul nu este număr natural). Este necesară o asemenea distincție în algoritmul împărțirilor în scris asemănătoare cu $624:3=208$: la cît avem zero zeci; cele 2 zeci, ce constituie un rest parțial (căci $2<3$), le transformăm în unități și le adunăm cu cele 4 unități și apoi continuăm împărțirea, adică $24:3=8$.

– nu are sens împărțirea $a : 0$, în care $a \neq 0$, căci nu există nici un număr x care înmulțit cu zero să dea un număr diferit de zero;
– nu are sens nici $0 : 0$, căci rezultatul nu este unic, ci nedeterminat, adică $0 : 0 = k$, în care $k \in N$; (dacă gîndim prin scădere repetată, ca la clasa a II-a, împărțirile $a : 0$ sau $0 : 0$ sînt fără sens, căci putem scădea la nesfîrșit zero din a sau din 0);
– împărțirea $0 : b$, în care $b \neq 0$, are cîtul 0, căci $0 \times b = 0$;
– împărțirea la 1 a unui număr natural dă cîtul același număr, adică $a : 1 = a$, dar $1 : a \neq a$;
– operația $a : b$, cînd $a = b$, are cîtul 1;
– operația $a : b$, cu $a < b$, este o împărțire cu rest, în care cîtul este zero, iar restul este egal cu a, deci $a = 0 \times b + a$;

e) care nu este comutativă, nici asociativă, adică: $a : b \neq b : a$, iar $(a : b) : c \neq a : (b : c)$, $(\forall)\ a, b, c \in N^*$;

5) regulile referitoare la ordinea efectuării și cele cu privire la relațiile dintre acestea:

a) adunarea și scăderea sînt operații de ordinul I, înmulțirea și împărțirea sînt operații de ordinul II, iar ridicarea la putere este operație de ordinul III;

b) dacă într-un exercițiu (o expresie) fără paranteze operațiile sînt de același ordin, le efectuăm, în general, în ordinea în care sînt scrise;

c) dacă într-un exercițiu (o expresie) fără paranteze operațiile sînt de ordine diferite, efectuăm, mai întîi, operațiile de ordinul III, apoi pe cele de ordinul II și, la sfîrșit, pe cele de ordinul I;

d) dacă într-o expresie există paranteze, efectuăm, mai întîi, calculele din paranteze; dacă sînt mai multe feluri de paranteze, după efectuarea calculelor din parantezele mici (rotunde), transformăm parantezele drepte (pătrate) în rotunde, iar acoladele în paranteze drepte; apoi ultimele paranteze drepte devin rotunde, iar în final obținem o expresie fără paranteze.

I. A.

1. a) **47**; b) **119**; c) **48**; d) **792**; e) **9810**; f) **1**; g) **6**; h) **2**; i) **497**; j) **674**; k) **1212**; l) **1**; m) **938326**; n) **4**; o) **42525**.

I. B.

2. a) Asociem primii doi termeni, iar la suma obținută adunăm al treilea termen: $(45 + 22) + 55 = 67 + 55 = 122$ sau b) Comutăm termenul al treilea și îl asociem cu primul, iar la suma obținută adunăm al doilea termen: $(45 + 55) + 22 = 100 + 22 = 122$.

3. Avem de adunat un număr cu o sumă. a) Efectuăm adunarea din paranteză și apoi la rezultatul obținut adunăm numărul dat: $138 + 491 = 629$ sau b) Adunăm numărul cu unul din termenii sumei din paranteză, iar rezultatul îl adunăm cu celălalt termen:

$138+(129+362)=(138+362)+129=500+129=629$ sau
$138+(129+362)=(138+129)+362=267+362=629$.

4. Asemănător cu exercițiul anterior: a) $1\,745+996=2\,741$ sau
b) $132+\ +(1\,004+996)+6\,099=132+2\,000+609=2\,741$.

5. Trebuie să scădem dintr-o sumă un număr. a) Efectuăm suma, iar din rezultatul obținut scădem numărul dat: $2\,277-694=1\,583$ sau b) Putem scădea numărul din unul dintre termenii sumei, iar rezultatul îl adunăm cu celălalt termen: $(1\,694-694)+583=1\,000+583=1\,583$.

6. Asemănător cu exercițiul anterior: a) $6\,549-1\,976=4\,573$ sau
b) $389+3\,184+(2\,976-1\,976)=4\,573$.

7. Trebuie să scădem dintr-un număr o sumă. a) Efectuăm adunarea, iar rezultatul îl scădem din numărul dat: $68-61=7$ sau b) Putem scădea din număr primul termen al sumei, iar din rezultat scădem al doilea termen (adică scădem din acel număr în mod succesiv fiecare termen al sumei): $68-(32+29)=68-32-29=36-29=7$.

8. Asemănător cu exercițiul anterior: a) $91-87=4$ sau
b) $91-(54+17+16)=91-54-17-16=37-17-16=20-16=4$.

9. Trebuie să adunăm un număr cu o diferență. a) Efectuăm diferența, iar restul îl adunăm cu numărul dat: $36+23=59$ sau b) Adunăm numărul dat cu descăzutul, iar din rezultat scădem scăzătorul, adică $36+(44-21)=$ $=(36+44)-21=80-21=59$.

10. Asemănător cu exercițiul precedent: a) $153+15=168$ sau b) $(153+128)-$ $-113=281-113=168$.

11. Trebuie să scădem dintr-un număr o diferență. a) Efectuăm diferența din paranteză, apoi o scădem din numărul dat: $36-36=0$ sau b) Putem aduna la numărul dat scăzătorul diferenței, iar din rezultat scădem descăzutul diferenței: $36-(100-64)=(36+64)-100=100-100=0$, adică
$36-(100-64)=36-100+64=36+64-100=100-100=0$.

12. Asemănător cu exercițiul precedent: a) $159-58=101$ sau
b) $159-(99-41)=(159+41)-99=200-99=101$.

13. a) $11+9=20$ sau b) Dacă dintr-un număr dat scădem și apoi adunăm același număr, numărul inițial rămîne neschimbat, adică $20-9+9=20$.

14. Asemănător cu exercițiul anterior: a) $60+70=130$ sau b) $130-70+70=$ $=130$.

15. a) $300-200=100$ sau b) Dacă la un număr dat adunăm și apoi scădem același număr, numărul inițial rămîne neschimbat, adică $100+200-200=100$ (A se vedea și explicația de la exercițiul 5b).

16. Asemănător cu exercițiul anterior: a) $117-39=78$ sau b) $78+39-39=$ $=78$.

17. a) $84-19-64=65-64=1$ sau b) Transformăm exercițiul, înlocuind scăzătorii prin suma lor (a se vedea și explicațiile de la exercițiul 7b): $100-16-19-64=100-(16+19+64)=100-99=1$.

18. Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $1\ 534-326-109-98=1\ 208-109-98=1\ 099-98=1\ 001$ sau
b) $1\ 986-452-326-109-98=1\ 986-(452+326+109+98)=$
$=1\ 986+985=1\ 001$.

19. Urmînd șirul operațiilor concrete din enunț se ajunge într-adevăr la scăderea $9-11$ care nu este posibilă în mulțimea numerelor naturale. Dacă la suma pe care o are, Silviu adaugă întîi suma pe care o primește de la Cristi și apoi dă 11 lei, se ajunge la exercițiul: $9+4-11=13-11=2$.
Deci $9-11+4=9+4-11=2$ (lei), problema fiind astfel rezolvată.

20. a) $9000+869-9868=9869-9868=1$ b) $83+17-91=100-91=9$
c) $(98+3+200+117)-101-190=101+200+117-101-190=418-$
$-101-190=127$ sau $(98+3+200+117)-(101+190)=418-291=127$
Pe baza exercițiilor 19 și 20, putem afirma că într-o succesiune de adunări și de scăderi (suma algebrică), procedăm și astfel: calculăm suma termenilor care se adună și, separat, suma termenilor care se scad; apoi efectuăm diferența dintre cele două sume obținute.
d) $10+70-20=80-20=60$ sau $(100+70)-(90+20)=170-110=60$.
e) $900-88-814+6=812-814+6=?$ Aplicînd regula de la punctul c), obținem: $(900+6)-(88+814)=906-902=4$ sau, de la etapa intermediară, se ajunge la: $812-814+6=812+6-814=818-814=4$.
f) $(19+81)-(28+16+6)=100-50=50$.
g) Asemănător cu exercițiul precedent:
$(3\times4+3\times3+7\times3)-(5\times3+3\times6)=(12+9+21)-(15+18)=42-33=9$;
dacă se observă că 3 este factor comun, se poate calcula și astfel:
$3\times(4+3+7)-3\times(5+6)=3\times14-3\times11=3\times(14-11)=3\times3=9$.

21. a) $8\times6\times5=48\times5=204$ sau b) Aplicînd asociativitatea și comutativitatea înmulțirii, putem efectua: $(2\times5)\times(4\times6)=10\times24=240$.

22. a) $32\times7\times75\times25=224\times75\times25=420\ 000$ sau
b) $(4\times25)\times(8\times75)\times7=100\times600\times7=60\ 000\times7=420\ 000$.

23. Trebuie să înmulțim un produs (neefectuat) cu un număr
a) $(30\times8)\times100=240\times100=24\ 000$ sau
b) Putem înmulți întîi numărul 100 cu unul dintre factorii produsului, adică: $(5\times6\times8)\times100=(6\times100)\times(5\times8)=600\times40=24\ 000$.

24. a) $14\times(72\times2\times5)=14\times(144\times5)=14\times720=10\ 080$ sau b) Putem înmulți întîi numărul 14 cu produsul dintre 2 și 5, adică: $(14\times2\times5)\times$
$\times(9\times8)=140\times72=10\ 080$.

25. a) $2\times15=30$ sau b) Înmulțirea este distributivă față de adunare, adică la înmulțirea unei sume (a unei adunări neefectuate) cu un număr, obținem același rezultat ca în modul anterior, dacă distribuim ca factor (adică înmulțim) numărul cu fiecare termen al sumei, iar rezultatele le adunăm, deci: $2\times(7+8)=2\times7+2\times8=14+16=30$. În general :
$a\times(b\times c)=a\times b+a\times c$.

26. a) $9 \times 6 = 54$ sau b) $(4+5) \times 6 = 4 \times 6 + 5 \times 6 = 24 + 30 = 54$.

27. a) $6 \times 30 = 180$ sau

b) $6 \times (5+15+10) = 6 \times 5 + 6 \times 15 + 6 \times 10 = 30 + 90 + 60 = 180$.

28. a) $4 \times 4 = 16$ sau b) Înmulţirea este distributivă şi faţă de scădere, adică la înmulţirea unei diferenţe (a unei scăderi neefectuate) cu un număr, obţinem acelaşi rezultat ca în modul anterior, dacă distribuim ca factor (înmulţim) numărul cu fiecare termen al diferenţei, iar rezultatele le scădem, deci: $4 \times (11-7) = 4 \times 11 - 4 \times 7 = 44 - 28 = 16$, în general, $a \times (b-c) = a \times b - a \times c$.

29. a) $9 \times 9 = 81$ sau b) $180 \times 9 - 171 \times 9 = 1\ 620 - 1\ 539 = 81$.

30. a) $10 \times (33-13) = 10 \times 20 = 200$ sau

b) $10 \times 72 - 10 \times 39 - 10 \times 13 = 720 - 390 - 130 = 200$.

31. a) $6 \times (8+4) = 6 \times 12 = 72$ sau $6 \times 40 - 6 \times 32 + 6 \times 4 = 240 - 192 + 24 = 72$.

b) Avem de efectuat suma a două produse.

Respectînd regulile privitoare la ordinea efectuării operaţiilor, obţinem: $6 \times 40 + 6 \times 32 = 240 + 192 = 432$. Dacă observăm că în cele două produse 6 este factor comun, obţinem: $6 \times (40+32) = 6 \times 72 = 432$.

c) $103 + 515 - 206 = 618 - 206 = 412$. Observînd că 103 este factor comun, căci $103 = 1 \times 103$, obţinem $103 \times (1+5-2) = 103 \times 4 = 412$.

32. Trebuie să înmulţim două sume (neefectuate).

a) Efectuăm adunările din fiecare paranteză, iar rezultatele le înmulţim, adică: $291 \times 12 = 3\ 492$ sau:

b) Înmulţirea a două sume se poate efectua şi înmulţind fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al sumei a doua, iar produsele obţinute se adună, adică:

$(200+90+1) \times (10+2) = 200 \times 10 + 90 \times 10 + 1 \times 10 + 2 \times 200 + 2 \times 90 +$
$+ 2 \times 1 = 2\ 000 + 900 + 10 + 400 + 180 + 2 = 3\ 492$.

33. a) $49 \times 13 + 637$ sau

b) $(30+15+4) \times (7+6) = 30 \times 7 + 15 \times 7 + 4 \times 7 + 6 \times 30 + 6 \times 15 + 6 \times 4 =$
$= 210 + 105 + 28 + 180 + 90 + 24 = 637$.

34. a) $265 \times 100 = 26\ 500$ sau

b) $136 \times 10 + 136 \times 20 + 136 \times 30 + 136 \times 40 + 129 \times 10 + 129 \times 20 +$
$+ 129 \times 30 + 129 \times 40 = 26\ 500$.

35. a) $9 \times 63 : 63 = 567 : 63 = 9$ sau

b) Dacă înmulţim şi apoi împărţim cu acelaşi număr un număr dat, acesta din urmă rămîne neschimbat:

$9 \times 63 : 63 = 9$; putem scrie exerciţiul şi astfel: $\frac{9 \times 63}{63} = 9$;

în general: $a \times b : b = a$; a se vedea şi exerciţiul $(4 \times 6 \times 5) : 3$.

36. a) $105 \times 14 : 14 = 1\ 470 : 14 = 105$ sau b) $105 \times 14 : 14 = 105$.

37. a) $5588 : 4 = 1\ 397$ sau

b) Numărul dat este 1 397, deci $1\ 397 \times 4 : 4 = 1\ 397$.

38. a) $864 : 72\times72=12\times72=864$ sau b) Dacă împărțim și apoi înmulțim cu același număr un număr dat, acesta din urmă rămîne neschimbat:

$864 : 72\times72=864$; putem scrie exercițiul și astfel: $\frac{864}{72}\cdot72=864$; în general, $a : b\times b=a$.

39. a) $324 : 18\times18=18\times18=324$ b) $324 : 18\times18=324$

40. Trebuie să împărțim un produs la un număr. a) Efectuăm produsul, iar apoi îl împărțim la numărul dat, adică: $120 : 3=40$ sau b) Putem împărți unul dintre factori la numărul dat, iar rezultatul îl înmulțim cu ceilalți factori, adică $4\times(6 : 3)\times5=4\times2\times5=4\times10=40$.

41. a) $(14\,976\times96) : 4=1\,437\,696 : 4=359\,424$ sau b) Se observă că fiecare factor se împarte la 4. Îl împărțim pe 208, fiind un număr mai mare, adică: $(208 : 4)\times72\times96=52\times72\times96=359\,424$.

42. a) $774\,000 : 1\,000=774$ sau b) $(2\,000 : 1\,000)\times387=2\times387=774$.

43. Trebuie să împărțim un număr la un produs. a) Efectuăm produsul, la care împărțim apoi numărul dat, adică $180 : 60=3$ sau b) Împărțim pe rînd la fiecare factor al produsului, adică $180 : 3 : 4 : 5=60 : 4 : 5=15 : 5=3$.

44. a) $3240 : (27\times24)=3240 : 648=5$ sau

b) $3240 : (9\times3\times24)=3240 : 9 : 3 : 24=360 : 3 : 2 : 24=120 : 24=5$

Observații: a) Dacă numărul se împarte exact (este divizibil) la (cu) fiecare factor, atunci numărul se împarte exact și la produsul factorilor. b) Al doilea mod de calcul este necesar la simplificarea fracțiilor sau cînd scriem exercițiul astfel:

$$\frac{\overset{360}{\cancel{3\,240}}}{\cancel{9}\times3\times24}=\frac{\overset{120}{\cancel{360}}}{\cancel{3}\times24}=\frac{120}{24}=5$$

45. Trebuie să împărțim un produs la alt produs: a) $288 : 24=12$ sau b) Putem împărți pe rînd factorii deîmpărțitului la factorii împărțitorului (dacă sînt împărțiri exacte) iar cîturile le înmulțim, adică:

$(9 : 3)\times(8 : 2)\times(4 : 4)=3\times4\times1=12$. Observație: Al doilea mod de calcul este necesar la simplificarea fracțiilor sau cînd scriem exercițiul astfel:

$$\frac{9\times8\times4}{3\times2\times4}=\frac{3\times8\times4}{2\times4}=\frac{3\times8}{2}=3\times4=12.$$

46. a) $432 : 24=18$ sau b) $(6 : 2)\times(9 : 3)\times(8 : 4)=3\times3\times2=18$.

47. a) $648 : 108=6$ sau b) $(18 : 3)\times[36 : (9\times4)]=6\times(36 : 36)=6\times1=6$.

48. a) $2304 : 64=36$ sau b) $(72 : 8)\times2\times(16 : 8)=9\times2\times2=36$ sau

$$\frac{\overset{9}{\cancel{72}}\times2\times\overset{2}{\cancel{16}}}{\cancel{8}\times\cancel{8}}=9\times2\times2=36$$

49. Trebuie să împărțim un număr la un cît neefectuat.

a) $324 : (18 : 6)=324 : 3=108$ sau b) Putem împărți numărul la deîmpărțit, dacă este împărțire exactă, iar rezultatul îl înmulțim cu

împărţitorul, adică : $324 : (18 : 6) = 324 : 18 \times 6 = 18 \times 6 = 108$ sau: înmulţim numărul cu împărţitorul, iar rezultatul îl împărţim la deîmpărţit, adică: $324 \times 6 : 18 = 1\ 944 : 18 = 108$.

50. a) $18 : (42 : 7) = 18 : 6 = 3$ sau b) $18 : (42 : 7) = 18 \times 7 : 42 = 126 : 42 = 3$.

51. a) $63 : (6 : 2) = 63 : 3 = 21$ sau b) $63 : 6 \times 2 = 63 \times 2 : 6 = 126 : 6 = 21$.

52. Trebuie să împărţim o sumă la (printr-un) număr. Efectuăm suma şi apoi o împărţim la numărul dat, adică: $(55 + 10) : 5 = 65 : 5 = 13$. b) Impărţim fiecare termen al sumei prin numărul dat (dacă împărţirile sînt exacte), apoi adunăm cîturile obţinute, adică: $(55 + 10) : 5 = 55 : 5 + 10 : 5 = 11 + 2 = 13$.

53. a) $826 : 7 = 118$. b) $63 : 7 + 28 : 7 + 735 : 7 = 9 + 4 + 105 = 118$.

54. Trebuie să împărţim o diferenţă la (printr-un) număr. a) Efectuăm diferenţa, apoi o împărţim la numărul dat, adică: $(72 - 36) : 9 = 36 : 9 = 4$ sau
b) Împărţim fiecare termen al diferenţei prin numărul dat, dacă este posibil, apoi scădem cîturile obţinute, adică: $(72 - 36) : 9 = 72 : 9 - 36 : 9 = 8 - 4 = 4$.

55. a) $(180 - 36) : 6 = 144 : 6 = 24$;
b) $192 : 6 - 12 : 6 - 36 : 6 = 32 - 2 - 6 = 30 - 6 = 24$.
Observaţii: a) Regula se aplică numai în cazul în care fiecare termen al sumei sau al diferenţei se împarte exact (este divizibil) la (cu) numărul dat, deoarece este posibil ca termenii sumei să nu se împartă exact la numărul dat şi totuşi suma sau diferenţa să fie divizibilă prin acel număr. De exemplu: în $(1 + 2 + 3) : 3 =$, 1 şi 2 nu sînt divizibile cu 3, dar $6 : 3 = 2$; suma $31 + 13 + 11$ este divizibilă prin 5, dar nici un termen al sumei nu este divizibil prin 5. b) În cazul în care trebuie să împărţim un număr la o sumă sau la o diferenţă, unica posibilitate este să efectuăm suma sau diferenţa, apoi să împărţim numărul la rezultatul obţinut (excepţie făcînd numărul 0). De exemplu: 1) $108 : (12 + 6) = 108 : 18 = 6$;
2) $3\ 294 : (2\ 974 - 2\ 965) = 3\ 294 : 9 = 366$;
3) $0 : (7 + 8) = 0 : 7 + 0 : 8 = 0 + 0 = 0$.

I. C.

56. Dacă mărim unul dintre cei doi termeni ai unei sume cu un număr, suma se măreşte cu acel număr.
a) $(1\ 009 + 137) + 2\ 991 = 4\ 000 + 137 = 4\ 137$; (verificare: $1\ 146 + 2\ 991 = 4\ 137$; b) $1\ 009 + (2\ 991 + 248) = 4\ 000 + 248 = 4\ 248$; (verificare: $1\ 009 + 3\ 239 = 4\ 248$);
c) $(1\ 009 + 248) + 2\ 991 = 4\ 000 + 248 = 4\ 248$; (verificare: $1\ 257 + 2\ 991 = 4\ 248$).

57. Asemănător cu exerciţiul precedent: a) $4\ 910 = 4\ 908 + 2 \Rightarrow 4\ 910 + 5\ 092 = 10\ 000 + 2 = 10\ 002$; (verificare: $4\ 910 + 5\ 092 = 10\ 002$); b) $5\ 101 = 5\ 092 + 9 \Rightarrow 4\ 908 + 5\ 101 = 10\ 000 + 9 = 10\ 009$; (verificare: $4\ 908 + 5\ 101 = 10\ 009$); c) $4\ 917 = 4\ 908 + 9 \Rightarrow 4\ 917 + 5\ 092 = 10\ 000 + 9 = 10\ 009$; (verificare: $4\ 917 + 5\ 092 = 10\ 009$); în general: $a + b = c \Rightarrow (a + d) + b = c + d$ sau $a + (b + d) = c + d$.

58. Dacă micșorăm unul dintre termenii unei sume cu un număr, suma se micșorează cu acel număr. a) $(2\ 098-2)+6\ 992=9\ 090-2=9\ 088$; (verificare: $2\ 096+6\ 992=9\ 088$); b) $2\ 098+(6\ 992-2)=9\ 090-2=9\ 088$ (verificare: $2\ 098+6\ 990=9\ 088$); c) $(2\ 098-87)+6\ 992=9\ 090-87=$ $=9\ 003$; (verificare: $2\ 011+6\ 992=9\ 003$); În general: $a-(b-d)=c-d$.

59. Asemănător cu exercițiul precedent: a) $3\ 006=3\ 026-20 \Rightarrow 3\ 006+414=$ $=3\ 440-20=3\ 420$; (verificare: $3\ 006+414=3\ 420$); b) $404=414-$ $10 \Rightarrow 3\ 026+404=3\ 440-10=3\ 430$; (verificare: $3\ 026+404=3\ 430$); c) $3\ 022=3\ 026-4 \Rightarrow 3\ 022+414=3\ 440-4=3\ 436$; (verificare: $3\ 022+$ $+414=3\ 436$).

60. Dacă mărim ambii termeni ai unei sume cu același număr, suma se mărește cu dublul acelui număr.

a) $(998+14)+(2\ 002+14)=3\ 000+14+14=3\ 028$;

b) $(998+115)+(2\ 002+115)=3\ 000+115+115=3\ 230$;

c) $(998+333)+(2\ 002+333)=3\ 000+333+333=3\ 666$;

În general: $a+b=c \Rightarrow (a+d)+(b+d)=c+d+d=c+2d$.

61. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{array}{l}3\,903=3\,900+3\\4\,918=4\,915+3\end{array}\right\} \Rightarrow 3\ 903+4\ 918=8\ 815+3+3=8\ 821$;

b) $\left.\begin{array}{l}3\,909=3\,900+9\\4\,924=4\,915+9\end{array}\right\} \Rightarrow 3\ 909+4\ 924=8\ 815+9+9=8\ 833$;

c) $\left.\begin{array}{l}3\,910=3\,900+10\\4\,925=4\,915+10\end{array}\right\} \Rightarrow 3\ 910+4\ 925=8\ 815+10+10=8\ 835$;

62. Dacă micșorăm ambii termeni ai unei sume cu același număr, suma se micșorează cu dublul acelui număr.

a) $(4\ 799-54)+(3\ 611-54)=8\ 410-2\times54=8\ 410-108=8\ 302$;

b) $(4\ 799-45)+(3\ 611-45)=8\ 410-2\times45=8\ 410-90=8\ 320$;

c) $(4\,799-1\,000)+(3\,611-1\,000)=8\,410-2\times1\,000=8\,410-2\,000=6\,410$;

În general: $a+b=c \Rightarrow (a-d)+(b-d)=c-d-d=c-2d$.

63. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{l}3\,486=3\,786-300\\616=916-300\end{array}\right\} \Rightarrow 3\,486+616=4\,702-2\times300=4\,702-600=4\,102$;

b) $\left.\begin{array}{l}3\,736=3\,786-50\\866=916-50\end{array}\right\} \Rightarrow 3\,736+866=4\,702-2\times50=4\,702-100=4\,602$;

c) $\left.\begin{array}{l}3\,785=3\,786-1\\915=916-1\end{array}\right\} \Rightarrow 3\ 785+915=4\ 702-2\times1=4\ 702-2=4\ 700$.

64. Dacă mărim ambii termeni ai unei sume, primul cu d, al doilea cu e, suma se mărește cu $d+e$.

a) $(46+3)+(136+1)=182+(3+1)=182+4=186$

b) $(46+2)+(136+3)=182+(2+3)=182+5=187$

c) $(46+1)+(136+3)=182+(1+3)=182+4=186$

În general: $a+b=c \Rightarrow (a+d)+(b+e)=c+(d+e)$.

65. a) $\left.\begin{array}{l}185=183+2\\194=191+3\end{array}\right\} \Rightarrow 185+194=374+(2+3)=374+5=379;$

b) $\left.\begin{array}{l}193=183+10\\195=191+4\end{array}\right\} \Rightarrow 193+195=374+(10+4)=374+14=388;$

c) $\left.\begin{array}{l}187=183+4\\201=191+10\end{array}\right\} \Rightarrow 187+201=374+(4+10)=374+14=388.$

66. Dacă micșorăm ambii termeni ai unei sume, primul cu d, al doilea cu e, suma se micșorează cu $d+e$.

a) $(76-2)+(189-3)=265-(2+3)=265-5=260;$

b) $(76-1)+(189-2)=265-(1+2)=265-3=262;$

c) $(76-2)+(189-1)=265-(2+1)=265-3=262.$

În general: $a+b=c \Rightarrow (a-d)+(b-e)=c-(d+e)$.

67. a) $\left.\begin{array}{l}387=397-10\\183=184-1\end{array}\right\} \Rightarrow 387+183=581-(10+1)=581-11=570;$

b) $\left.\begin{array}{l}297=397-100\\174=184-10\end{array}\right\} \Rightarrow 297+174=581-(100+10)=581-110=471;$

c) $\left.\begin{array}{l}396=397-1\\174=184-10\end{array}\right\} \Rightarrow 396+174=581-(1+10)=581-11=570.$

68. Dacă mărim unul dintre cei doi termeni ai unei sume cu a, iar celălalt îl micșorăm cu b, atunci:

– în cazul în care $a-b=c$, suma se mărește cu c;

– în cazul în care $b-a=d$, suma se micșorează cu d.

a) $(597+5)+(486-4)=1\ 083+(5-4)=1\ 083+1=1\ 084;$

b) $(597-5)+(486+4)=1\ 083-(5-4)=1\ 083-1=1\ 082;$

c) $(597+1)+(486-2)=1\ 083-(2-1)=1\ 083-1=1\ 082.$

69. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{r}1\ 608=1\ 609-1\\898=896+2\end{array}\right\} \Rightarrow 1\ 608+898=2\ 505+(2-1)=2\ 505+1=2\ 506;$

b) $\left.\begin{array}{r}1\ 617=1\ 609+8\\893=896-3\end{array}\right\} \Rightarrow 1\ 617+893=2\ 505+(8-3)=2\ 505+5=2\ 510;$

c) $\left.\begin{array}{r}1\ 709=1\ 609+100\\696=896-200\end{array}\right\} \Rightarrow 1\ 709+696=2\ 505-(200-100)=$
$=2\ 505-100=2\ 405.$

70. Dacă mărim unul dintre cei doi termeni ai unei sume cu un număr, iar pe celălalt îl micșorăm cu același număr, suma rămîne neschimbată.

a) $(938+6)+(9\ 986-6)=10\ 924+6-6=10\ 924;$

b) $(938+37)+(9\ 986-37)=10\ 924+37-37=10\ 924;$

c) $(938-248)+(9\ 986+248)=10\ 924;$

În general: $a+b=c \Rightarrow (a+d)+(b-d)=c$ sau $(a-d)-(b+d)=c$.

71. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{array}{r}1\ 894=1\ 892+2\\727=729-2\end{array}\right\} \Rightarrow 1\ 894+727=2\ 621+2-2=2\ 621;$

b) $\left.\begin{array}{l}1\ 882=1\ 892-10\\ 739=729+10\end{array}\right\} \Rightarrow 1\ 882+739=2\ 621;$

c) $\left.\begin{array}{l}1\ 792=1\ 892-100\\ 829=729+100\end{array}\right\} \Rightarrow 1\ 792+829=2\ 621.$

72. Dacă mărim descăzutul cu un număr, scăzătorul fiind același, diferența se mărește cu acel număr.

a) $(11\ 002+10)-398=10\ 604+10=10\ 614;$

b) $(11\ 002+344)-398=10\ 604+344=10\ 948;$

c) $(11\ 002+1)-398=10\ 604+1=10\ 605;$

În general: $a-b=c \Rightarrow (a+d)-b=c+d.$

73. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $3\ 010=3\ 007+3 \Rightarrow 3\ 010-19=2\ 988+3=2\ 991;$

b) $3\ 107=3\ 007+100 \Rightarrow 3\ 107-19=2\ 988+100=3\ 088;$

c) $3\ 008=3\ 007+1 \Rightarrow 3\ 008-19=2\ 988+1=2\ 989.$

74. Dacă micșorăm descăzutul cu un număr, scăzătorul fiind același, diferența se micșorează cu același număr.

a) $(9\ 032-32)-2\ 927=6\ 105-32=6\ 073;$

b) $(9\ 032-5)-2\ 927=6\ 105-5=6\ 100;$

c) $(9\ 032-1\ 000)-2\ 927=6\ 105-1\ 000=5\ 105;$

În general: $a-b=c \Rightarrow (a-d)-b=c-d.$

75. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $8\ 145=8\ 146-1 \Rightarrow 8\ 145-987=7\ 159-1=7\ 158;$

b) $8\ 136=8\ 146-10 \Rightarrow 8\ 136-987=7\ 159-10=7\ 149;$

c) $8\ 046=8\ 146-100 \Rightarrow 8\ 146-987=7\ 159-100=7\ 059.$

76. Dacă mărim scăzătorul cu un număr, descăzutul fiind același, diferența se micșorează cu același număr.

a) $501-(36+1)=465-1=464;$

b) $501-(36+10)=465-10=455;$

c) $501-(36+100)=465-100=365;$

În general: $a-b=c \Rightarrow a-(b+d)=c-d.$

77. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $386=385+1 \Rightarrow 712-386=327-1=326;$

b) $395=385+10 \Rightarrow 712-395=327-10=317;$

c) $485=385+100 \Rightarrow 712-485=327-100=227.$

78. Dacă micșorăm scăzătorul cu un număr, descăzutul fiind același, diferența se mărește cu același număr.

a) $1\ 000-(786-1)=214+1=215;$

b) $1\ 000-(786-10)=214+10=224;$

c) $1\ 000-(786-100)=214+100=314;$

În general: $a-b=c \Rightarrow a-(b-d)=c+d.$

79. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $1\ 808=1\ 809-1 \Rightarrow 3\ 101-1\ 808=1\ 292+1=1\ 293;$

b) $1\ 799 = 1\ 809 - 10 \Rightarrow 3\ 101 - 1\ 799 = 1\ 292 + 10 = 1\ 302$;
c) $1\ 709 = 1\ 809 - 100 \Rightarrow 3\ 101 - 1\ 709 = 1\ 292 + 100 = 1\ 392$.

80. Dacă mărim atît descăzutul, cît și scăzătorul cu același număr, diferența rămîne neschimbată.
a) $(3\ 102 + 2) - (983 + 2) = 2\ 119 + 2 - 2 = 2\ 119$;
b) $(3\ 102 + 20) - (983 + 20) = 2\ 119 + 20 - 20 = 2\ 119$;
c) $(3\ 102 + 200) - (983 + 200) = 2\ 119 + 200 - 200 = 2\ 119$;
În general: $a - b = c \Rightarrow (a + d) - (b + d) = c$.

81. Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $\left.\begin{matrix} 2\ 024 = 2\ 023 + 1 \\ 638 = 637 + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\ 024 - 638 = 1\ 386$;
b) $\left.\begin{matrix} 2\ 033 = 2\ 033 + 10 \\ 647 = 637 + 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\ 033 - 647 = 1\ 386$;
c) $\left.\begin{matrix} 3\ 023 = 2\ 023 + 1000 \\ 1637 = 637 + 1000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\ 023 - 1\ 637 = 1\ 386$.

82. Dacă micșorăm atît descăzutul, cît și scăzătorul cu același număr, diferența rămîne neschimbată.
a) $(1\ 713 - 3) - (824 - 3) = 889 - 3 + 3 = 889$;
b) $(1\ 713 - 30) - (824 - 30) = 889 - 30 + 30 = 889$;
c) $(1\ 713 - 300) - (824 - 300) = 889 - 300 + 300 = 889$;
În general: $a - b = c \Rightarrow (a - d) - (b - d) = c$.

83. Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $\left.\begin{matrix} 9\ 099 = 9\ 100 - 1 \\ 7\ 887 = 7\ 888 - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 9\ 099 - 7\ 887 = 1\ 212$;
b) $\left.\begin{matrix} 9\ 000 = 9\ 100 - 100 \\ 7\ 788 = 7\ 888 - 100 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 9\ 000 - 7\ 788 = 1\ 212$;
c) $\left.\begin{matrix} 8\ 100 = 9\ 100 - 1\ 000 \\ 6\ 888 = 7\ 888 - 1\ 000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8\ 100 - 6\ 888 = 1\ 212$.

84. Dacă mărim descăzutul cu un număr și micșorăm scăzătorul cu același număr, diferența se mărește cu dublul acelui număr.
a) $(1\ 114 + 1) - (367 - 1) = 747 + 2 \times 1 = 749$;
b) $(1\ 114 + 40) - (367 - 40) = 747 + 2 \times 40 = 747 + 80 = 827$;
c) $(1\ 114 + 100) - (367 - 100) = 747 + 2 \times 100 = 747 + 200 = 947$;
În general: $a - b = c \Rightarrow (a + d) - (b - d) = c + d + d = c + 2d$.

85. Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $\left.\begin{matrix} 2\ 101 = 2\ 100 + 1 \\ 790 = 791 - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\ 101 - 790 = 1\ 309 + 2 \times 1 = 1\ 309 + 2 = 1\ 311$;
b) $\left.\begin{matrix} 2\ 110 = 2\ 100 + 10 \\ 781 = 791 - 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\ 110 - 781 = 1\ 309 + 2 \times 10 = 1\ 309 + 20 = 1\ 329$;
c) $\left.\begin{matrix} 2\ 200 = 2\ 100 + 100 \\ 691 = 791 - 100 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\ 200 - 691 = 1\ 309 + 2 \times 100 = 1\ 309 + 200 =$
$= 1\ 509$;

86. Dacă micșorăm descăzutul cu un număr și mărim scăzătorul cu același număr, diferența se micșorează cu dublul acelui număr.

a) $(6\ 106-1)-(3\ 207+1)=2\ 899-2\times1=2\ 899-2=2\ 897$;
b) $(6\ 106-100)-(3\ 207+100)=2\ 899-2\times100=2\ 899-200=2\ 699$;
c) $(6\ 106-1\ 000)-(3\ 207+1\ 000)=2\ 899-2\times1\ 000=$
$=2\ 899-2\ 000=899$;
În general: $a-b=c \Rightarrow (a-d)-(b-d)=c-d-d=c-2d$.

87. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{matrix}6\ 846=6\ 847-1\\ 1\ 979=1\ 978+1\end{matrix}\right\} \Rightarrow 6\ 846-1\ 979=4\ 869-2\times1=4\ 869-2=4\ 867$;

b) $\left.\begin{matrix}6\ 837=6\ 847-10\\ 1\ 988=1\ 978+10\end{matrix}\right\} \Rightarrow 6\ 837-1\ 988=4\ 869-2\times10=$
$=4\ 869-20=4\ 849$;

c) $\left.\begin{matrix}5\ 847=6\ 847-1\ 000\\ 2\ 978=1\ 978+1\ 000\end{matrix}\right\} \Rightarrow 5\ 847-2\ 978=4\ 869-2\times1\ 000=$
$=4\ 869-2\ 000=2\ 869$;

88. Dacă mărim descăzutul cu d, iar scăzătorul îl micșorăm cu e, diferența se mărește cu $d+e$.
a) $(162+1)-(86-2)=76+(1+2)=76+3=79$;
b) $(162+3)-(86-1)=76+(3+1)=76+4=80$;
c) $(162+4)-(86-3)=76+(4+3)=76+7=83$;
În general: $a-b=c \Rightarrow (a+d)-(b-e)=c+(d+e)$.

89. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{matrix}918=917+1\\ 176=179-3\end{matrix}\right\} \Rightarrow 918-176=738+(1+3)=738+4=742$;

b) $\left.\begin{matrix}927=917+10\\ 171=179-8\end{matrix}\right\} \Rightarrow 927-171=738+(10+8)=738+18=756$;

c) $\left.\begin{matrix}947=917+30\\ 159=179-20\end{matrix}\right\} \Rightarrow 947-159=738+(30+20)=738+50=788$.

90. Dacă micșorăm descăzutul cu d și mărim scăzătorul cu e, diferența se micșorează cu $d+e$.
a) $(2\ 437-5)-(978+4)=1\ 459-(5+4)=1\ 459-9=1\ 450$;
b) $(2\ 437-2)-(978+13)=1\ 459-(2+13)=1\ 459-15=1\ 444$;
c) $(2\ 437-17)-(978+15)=1\ 459-(17+15)=1\ 459-32=1\ 427$;
În general: $a-b=c \Rightarrow (a-d)-(b+e)=c-(d+e)$.

91. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{matrix}14\ 765=14\ 766-1\\ 4\ 369=4\ 367+2\end{matrix}\right\} \Rightarrow 14\ 765-4\ 369=10\ 399-(1+2)=$
$=10\ 399-3=10\ 396$;

b) $\left.\begin{matrix}14\ 666=14\ 766-100\\ 4\ 567=4\ 367+200\end{matrix}\right\} \Rightarrow 14\ 666-4\ 567=10\ 399-(100+200)=$
$=10\ 399-300=10\ 099$;

c) $\left.\begin{matrix}12\ 766=14\ 766-2\ 000\\ 5\ 367=4\ 367+1\ 000\end{matrix}\right\} \Rightarrow 12\ 766-5\ 367=10\ 399-(2\ 000+1\ 000)=$
$=10\ 399-3\ 000=7\ 399$;

92. Dacă mărim ambii termeni ai unei diferențe, descăzutul cu a, iar scăzătorul cu b, atunci:

– diferența se mărește cu c, dacă $a-b=c$;

– diferența se micșorează cu d, dacă $b-a=d$.

a) $(2\ 306+4)-(878+3)=1\ 428+(4-3)=1\ 428+1=1\ 429$;

b) $(2\ 306+3)-(878+4)=1\ 428-(4-3)=1\ 428-1=1\ 427$;

c) $(2\ 306+2)-(878+1)=1\ 428+(2-1)=1\ 428+1=1\ 429$;

93. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{matrix}3\ 002=3\ 001+1\\188=186+2\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\ 002-188=2\ 815-(2-1)=2\ 815-1=2\ 814$;

b) $\left.\begin{matrix}3\ 011=3\ 001+10\\187=186+1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\ 011-187=2\ 815+(10-1)=2\ 815+9=2\ 824$;

c) $\left.\begin{matrix}3\ 010=3\ 001+9\\196=186+10\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\ 010-196=2\ 815-(10-9)=2\ 815-1=2\ 814$;

94. Dacă micșorăm ambii termeni ai unei diferențe, descăzutul cu a, scăzătorul cu b, atunci:

– diferența se micșorează cu c, dacă $a-b=c$;

– diferența se mărește cu d, dacă $b-a=d$.

a) $(1\ 597-3)-(999-2)=598-(3-2)=598-1=597$;

b) $(1\ 597-7)-(999-8)=598+(8-7)=598+1=599$;

c) $(1\ 597-8)-(999-7)=598-(8-7)=598-1=597$;

95. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{matrix}8\ 690=8\ 696-6\\5\ 579=5\ 589-10\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$8\ 690-5\ 579=3\ 107+(10-6)=3\ 107+4=3\ 111$;

b) $\left.\begin{matrix}8\ 496=8\ 696-200\\5\ 489=5\ 589-100\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$8\ 496-5\ 489=3\ 107-(200-100)=3\ 107-100=3\ 007$;

c) $\left.\begin{matrix}7\ 696=8\ 696-1\ 000\\3\ 589=5\ 589-2\ 000\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$7\ 696-3\ 589=3\ 107+(2\ 000-1\ 000)=3\ 107+1\ 000=4\ 107$;

96. Dacă mărim un factor de un număr de ori, se mărește și produsul de același număr de ori.

a) $(6\times 6)\times 12=72\times 6=432$;

b) $(6\times 36)\times 12=72\times 36=2\ 592$;

c) $6\times(12\times 4)=72\times 4=288$;

În general: $a\times b=c\Rightarrow(a\times d)\times b=c\times d$ sau $a\times(b\times d)=c\times d$.

97. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $26=2\times 13\Rightarrow 26\times 24=552\times 2=1\ 104$;

b) $48=2\times 24\Rightarrow 13\times 48=2\times 552=1\ 104$;

c) $52=4\times 13\Rightarrow 52\times 24=4\times 552=2\ 208$.

98. Dacă micșorăm un factor de un număr de ori, se micșorează și produsul de același număr de ori.

a) $(8\ 104 : 2) \times 8 = 64\ 832 : 2 = 32\ 416$;
b) $8\ 104 \times (8 : 2) = 64\ 832 : 2 = 32\ 416$;
c) $(8\ 104 : 4) \times 8 = 64\ 832 : 4 = 16\ 208$;
În general: $a \times b = c \Rightarrow (a : d) \times b = c : d$ sau $a \times (b : d) = c : d$.

99. Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $12 = 48 : 4 \Rightarrow 12 \times 96 = 4\ 608 : 4 = 1\ 152$;
b) $24 = 48 : 2 \Rightarrow 24 \times 96 = 4\ 608 : 2 = 2\ 304$;
c) $16 = 96 : 6 \Rightarrow 48 \times 16 = 4\ 608 : 6 = 768$.

100. Dacă mărim ambii factori de același număr de ori, se mărește și produsul de același număr de ori la pătrat.
a) $(4 \times 2) \times (8 \times 2) = 32 \times (2 \times 2) = 32 \times 4 = 128$;
b) $(4 \times 3) \times (8 \times 3) = 32 \times (3 \times 3) = 32 \times 9 = 288$;
c) $(4 \times 5) \times (8 \times 5) = 32 \times (5 \times 5) = 32 \times 25 = 800$.

101. Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $\left.\begin{matrix}36=9\times4\\24=6\times4\end{matrix}\right\} \Rightarrow 36 \times 24 = 54 \times (4 \times 4) = 54 \times 16 = 864$;
b) $\left.\begin{matrix}90=9\times10\\60=6\times10\end{matrix}\right\} \Rightarrow 90 \times 60 = 54 \times (10 \times 10) = 54 \times 100 = 5\ 400$;
c) $\left.\begin{matrix}72=9\times8\\48=6\times8\end{matrix}\right\} \Rightarrow 78 \times 48 = 54 \times (8 \times 8) = 54 \times 64 = 3\ 456$.

102. Dacă micșorăm ambii factori de același număr de ori, se micșorează și produsul de același număr de ori la pătrat.
a) $(174 : 2) \times (126 : 2) = 21\ 924 : (2 \times 2) = 21\ 924 : 4 = 5\ 481$;
b) $(174 : 3) \times (126 : 3) = 21\ 924 : (3 \times 3) = 21\ 924 : 9 = 2\ 436$;
c) $(174 : 6) \times (126 : 6) = 21\ 924 : (6 \times 6) = 21\ 924 : 36 = 609$;
În general: $a \times b = c \Rightarrow (a : d) \times (b : d) = c : (d \times d)$.

103. Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $\left.\begin{matrix}62=186:3\\26=78:3\end{matrix}\right\} \Rightarrow 62 \times 36 = 14\ 508 : (3 \times 3) = 14\ 508 : 9 = 1\ 612$;
b) $\left.\begin{matrix}93=186:2\\39=78:2\end{matrix}\right\} \Rightarrow 93 \times 39 = 14\ 508 : 4 = 3\ 627$;
c) $\left.\begin{matrix}31=186:6\\13=78:6\end{matrix}\right\} \Rightarrow 31 \times 13 = 14\ 508 : 36 = 403$.

104. Dacă mărim ambii factori, primul de a ori, al doilea de b ori, produsul dat se mărește de $a \times b$ ori.
a) $(6 \times 2) \times (8 \times 4) = 48 \times (2 \times 4) = 48 \times 8 = 384$;
b) $(6 \times 3) \times (8 \times 2) = 48 \times (3 \times 2) = 48 \times 6 = 288$;
c) $(6 \times 2) \times (8 \times 3) = 48 \times (2 \times 3) = 48 \times 6 = 288$;
În general: $a \times b = c \Rightarrow (a \times d) \times (b \times e) = c \times (d \times e)$.

105. Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $\left.\begin{matrix}72=2\times36\\72=3\times24\end{matrix}\right\} \Rightarrow 72 \times 72 = 864 \times (2 \times 3) = 864 \times 6 = 5\ 184$;

b) $\left.\begin{matrix}108=36\times3\\48=24\times2\end{matrix}\right\}\Rightarrow 108\times48=864\times(3\times2)=864\times6=5\ 184;$

c) $\left.\begin{matrix}144=36\times4\\72=24\times3\end{matrix}\right\}\Rightarrow 144\times72=864\times(4\times3)=864\times12=10\ 368.$

106. Dacă micșorăm ambii factori, primul de ***a*** ori, al doilea de ***b*** ori, produsul dat se micșorează de ***a***×***b*** ori.

a) $(4\ 788 : 4)\times(1\ 872 : 2)=8\ 963\ 136 : (4\times2)=$
$=8\ 963\ 136 : 8=1\ 120\ 392;$

b) $(4\ 788 : 2)\times(1\ 872 : 3)=8\ 963\ 136 : (2\times3)=$
$=8\ 963\ 136 : 6=1\ 493\ 856;$

c) $(4\ 788 : 3)\times(1\ 872 : 2)=8\ 963\ 136 : (3\times2)=$
$=8\ 963\ 136 : 6=1\ 493\ 856;$

În general: $a\times b=c\Rightarrow(a : d)\times(b : e)=c : (d\times e).$

107. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{matrix}1233=3699:3\\936=1872:2\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1\ 233\times936=6\ 924\ 528 : (3\times2)=$
$=6\ 924\ 528 : 6=1\ 154\ 088;$

b) $\left.\begin{matrix}411=3699:9\\624=1872:3\end{matrix}\right\}\Rightarrow 411\times624=6\ 924\ 528 : (9\times3)=$
$=6\ 924\ 528 : 27=256\ 464;$

c) $\left.\begin{matrix}137=3699:27\\468=1872:4\end{matrix}\right\}\Rightarrow 137\times468=6\ 924\ 528 : (27\times4)=$
$=6\ 924\ 528 : 108=64\ 116.$

108. Dacă mărim unul dintre factori de un număr de ori, iar celălalt îl micșorăm de același număr de ori, produsul dat rămîne neschimbat.

a) $(2\ 024\times4)\times(4\ 048 : 4)=8\ 193\ 152\times(4 : 4)=$
$=8\ 193\ 152\times1=8\ 193\ 152;$

b) $(2\ 024 : 8)\times(4\ 048 : 8)=8\ 193\ 152\times(8 : 8)=$
$=8\ 193\ 152\times1=8\ 193\ 152;$

c) $(2\ 024 : 2)\times(4\ 048\times2)=8\ 193\ 152;$

În general: $a\times b=c\Rightarrow(a\times d)\times(b : d)=c.$

109. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{matrix}81=324:4\\912=228\times4\end{matrix}\right\}\Rightarrow 81\times912=73\ 872;$

b) $\left.\begin{matrix}108=324:3\\684=228\times3\end{matrix}\right\}\Rightarrow 108\times684=73\ 872;$

c) $\left.\begin{matrix}668=324\times2\\114=228:2\end{matrix}\right\}\Rightarrow 668\times114=73\ 872;$

110. Într-un produs de doi factori, dacă mărim unul dintre factori de ***a*** ori, iar pe celălalt îl micșorăm de ***b*** ori, atunci:

– în cazul în care $a : b=c$, produsul se mărește de ***c*** ori;
– în cazul în care $b : a=d$, produsul se micșorează de ***d*** ori.

a) $(28\times4)\times(36 : 2)=1\ 008\times(4 : 2)=1\ 008\times2=2\ 016;$

b) $(28 : 2) \times (36 \times 6) = 1\ 008 \times (6 : 2) = 1\ 008 \times 3 = 3\ 024$;
c) $(28 \times 2) \times (36 : 4) = 1\ 008 : (4 : 2) = 1\ 008 : 2 = 504$.

111. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{r} 36 = 324 : 9 \\ 864 = 288 \times 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 36 \times 864 = 93\ 312 : (9 : 3) = 93\ 312 : 3 = 31\ 104$ sau
$93\ 312 : 9 \times 3 = 10\ 368 \times 3 = 31\ 104$;

b) $\left.\begin{array}{r} 648 = 324 \times 2 \\ 48 = 288 : 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 648 \times 48 = 93\ 312 : (6 : 2) = 93\ 312 : 3 = 31\ 104$ sau
$93\ 312 : 6 \times 2 = 15\ 552 \times 2 = 31\ 104$;

c) $\left.\begin{array}{r} 81 = 324 : 4 \\ 576 = 288 \times 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 81 \times 576 = 93\ 312 : (4 : 2) = 93\ 312 : 2 = 46\ 656$ sau
$93\ 312 : 4 \times 2 = 23\ 328 \times 2 = 46\ 656$.

112. Într-un produs de doi factori, dacă mărim unul din factori cu un număr, rezultatul se mărește cu produsul dintre acel număr și celălalt factor.
a) $(37 + 10) \times 12 = 444 + 12 \times 10 = 444 + 120 = 564$;
b) $(37 + 5) \times 12 = 444 + 5 \times 12 = 444 + 60 = 504$;
c) $37 \times (12 + 6) = 444 + 6 \times 37 = 444 + 222 = 666$.
În general: $a \times b = c \Rightarrow (a + d) \times b = c + d \times b$ sau $a \times b = c \Rightarrow a \times (b + d) = c + a \times d$.

113. Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $102 = 92 + 10 \Rightarrow 102 \times 18 = 1\ 656 + 10 \times 18 = 1\ 656 + 180 = 1\ 736$ sau
$(92 + 10) \times 18 = 92 \times 18 + 10 \times 18 = 1\ 656 + 180 = 1\ 735$;
b) $28 = 18 + 10 \Rightarrow 92 \times 28 = 1\ 656 + 10 \times 92 = 1\ 656 + 920 = 2\ 576$ sau
$92 \times (18 + 10) = 92 \times 18 + 92 \times 10 = 1\ 656 + 920 = 2\ 576$;
c) $23 = 18 + 5 \Rightarrow 92 \times 23 = 1\ 656 + 5 \times 92 = 1\ 656 + 460 = 2\ 116$ sau
$92 \times (18 + 5) = 92 \times 8 + 92 \times 5 = 1\ 656 + 460 = 2\ 116$.

114. Într-un produs de doi factori, dacă micșorăm unul din factori cu un număr, rezultatul dat se micșorează cu produsul dintre acel număr și celălalt factor.
a) $(28 - 10) \times 43 = 1\ 204 - 10 \times 43 = 1\ 204 - 430 = 774$;
b) $28 \times (43 - 10) = 1\ 204 - 28 \times 10 = 1\ 204 - 280 = 924$;
c) $(28 - 2) \times 43 = 1\ 204 - 2 \times 43 = 1\ 204 - 86 = 1\ 118$.
În general: $a \times b = c \Rightarrow (a - d) \times b = c - d \times b$ sau $a \times b = c \Rightarrow a \times (b - d) = c - a \times d$.

115. Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $294 = 394 - 100 \Rightarrow$
$294 \times 189 = 74\ 466 - 189 \times 100 = 74\ 466 - 18\ 900 = 55\ 566$ sau
$(394 - 100) \times 189 = 394 \times 189 - 100 \times 189 = 74\ 466 - 18\ 900 = 55\ 566$;
b) $89 = 189 - 100 \Rightarrow$
$394 \times 89 = 74\ 466 - 100 \times 394 = 74\ 466 - 39\ 400 = 35\ 066$ sau
$394 \times (189 - 100) = 394 \times 189 - 394 \times 100 = 74\ 466 - 39\ 400 = 35\ 066$;
c) $384 = 394 - 10 \Rightarrow$
$384 \times 189 = 74\ 466 - 10 \times 189 = 74\ 466 - 1\ 890 = 72\ 576$ sau
$(394 - 10) \times 189 = 394 \times 189 - 10 \times 189 = 74\ 466 - 1\ 890 = 72\ 576$.

116. Dacă mărim deîmpărțitul de un număr de ori, împărțitorul fiind neschimbat, cîtul se mărește de același număr de ori.

a) $(120 \times 2) : 4 = 30 \times 2 = 60$;
b) $(120 \times 10) : 4 = 30 \times 10 = 300$;
c) $(120 \times 3) : 4 = 30 \times 3 = 90$;
În general: $a : b = c \Rightarrow (a \times d) : b = c \times d$.

117. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $532 = 4 \times 133 \Rightarrow 532 : 19 = 4 \times 7 = 28$;
b) $399 = 3 \times 133 \Rightarrow 399 : 19 = 3 \times 7 = 21$;
c) $1\,064 = 8 \times 133 \Rightarrow 1\,064 : 19 = 8 \times 7 = 56$.

118. Dacă micșorăm deîmpărțitul de un număr de ori, împărțitorul fiind neschimbat, cîtul se micșorează de același număr de ori.

a) $(120 : 2) : 4 = 30 : 2 = 15$;
b) $(120 : 10) : 4 = 30 : 10 = 3$;
c) $(120 : 3) : 4 = 30 : 3 = 10$;
În general: $a : b = c \Rightarrow (a : d) : b = c : d$.

119. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $192 = 960 : 5 \Rightarrow 192 : 24 = 40 : 5 = 8$;
b) $120 = 960 : 8 \Rightarrow 120 : 24 = 40 : 8 = 5$;
c) $96 = 960 : 10 \Rightarrow 96 : 24 = 40 : 10 = 4$.

120. Dacă mărim împărțitorul de un număr de ori, deîmpărțitul fiind neschimbat, cîtul se micșorează de același număr de ori.

a) $120 : (4 \times 3) = 30 : 3 = 10$;
b) $120 : (4 \times 2) = 30 : 2 = 15$;
c) $120 : (4 \times 6) = 30 : 6 = 5$;
În general: $a : b = c \Rightarrow a : (b \times d) = c : d$.

121. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $45 = 3 \times 15 \Rightarrow 675 : 45 = 45 : 3 = 15$;
b) $75 = 5 \times 15 \Rightarrow 675 : 75 = 45 : 5 = 9$;
c) $225 = 15 \times 15 \Rightarrow 675 : 225 = 45 : 15 = 3$.

122. Dacă micșorăm împărțitorul de un număr de ori, deîmpărțitul fiind același, cîtul se mărește de același număr de ori.

a) $126 : (18 : 2) = 7 \times 2 = 14$;
b) $126 : (18 : 3) = 7 \times 3 = 21$;
c) $126 : (18 : 9) = 7 \times 9 = 63$.
În general: $a : b = c \Rightarrow a : (b : d) = c \times d$.

123. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $18 = 36 : 2 \Rightarrow 432 : 18 = 12 \times 2 = 24$;
b) $9 = 36 : 4 \Rightarrow 432 : 9 = 12 \times 4 = 48$;
c) $3 = 36 : 12 \Rightarrow 432 : 3 = 12 \times 12 = 144$.

124. Dacă mărim atît deîmpărțitul, cît și împărțitorul de același număr de ori, cîtul rămîne neschimbat.

a) $(120 \times 2) : (4 \times 2) = 240 : 8 = 30$;
b) $(120 \times 10) : (4 \times 10) = 30$;
c) $(120 \times 5) : (4 \times 5) = 30$;
În general: $a : b = c \Rightarrow (a \times d) : (b \times d) = c$.

125. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{matrix} 288 = 2 \times 144 \\ 24 = 2 \times 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 288 : 24 = 12$;

b) $\left.\begin{matrix} 720 = 5 \times 144 \\ 60 = 5 \times 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 720 : 60 = 12$;

c) $\left.\begin{matrix} 1\,440 = 10 \times 144 \\ 120 = 10 \times 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1\,440 : 120 = 12$.

126. Dacă micșorăm atît deîmpărțitul, cît și împărțitorul de același număr de ori, cîtul rămîne neschimbat.
a) $(4\,944 : 2) : (48 : 2) = 2\,472 : 24 = 103$;
b) $(4\,944 : 4) : (48 : 4) = 103$;
c) $(4\,944 : 6) : (48 : 6) = 103$;
În general: $a : b = c \Rightarrow (a : d) : (b : d) = c$.

127. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{matrix} 2\,520 = 5\,040 : 2 \\ 24 = 48 : 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\,520 : 24 = 105$;

b) $\left.\begin{matrix} 1\,680 = 5\,040 : 3 \\ 16 = 48 : 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1\,680 : 16 = 105$;

c) $\left.\begin{matrix} 840 = 5\,040 : 6 \\ 8 = 48 : 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 840 : 8 = 105$.

128. Dacă mărim deîmpărțitul de un număr de ori și micșorăm împărțitorul de același număr de ori, cîtul se mărește de acel număr de ori la pătrat.
a) $(13\,392 \times 3) : (558 : 3) = 24 \times (3 \times 3) = 24 \times 9 = 216$;
b) $(13\,392 \times 9) : (558 : 9) = 24 \times (9 \times 9) = 24 \times 81 = 1\,944$;
c) $(13\,392 \times 2) : (558 : 2) = 24 \times (2 \times 2) = 24 \times 4 = 96$;
În general: $a : b = c \Rightarrow (a \times d) : (b : d) = c \times (d \times d)$.

129. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{matrix} 928\,512 = 116\,064 \times 8 \\ 78 = 624 : 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
$928\,512 : 78 = 186 \times (8 \times 8) = 186 \times 64 = 11\,904$;

b) $\left.\begin{matrix} 464\,256 = 116\,064 \times 4 \\ 156 = 624 : 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
$464\,256 : 156 = 186 \times (4 \times 4) = 186 \times 16 = 2\,976$;

c) $\left.\begin{matrix} 348\,192 = 116\,064 \times 3 \\ 208 = 624 : 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 348\,192 : 208 = 186 \times (3 \times 3) = 186 \times 9 = 1\,674$.

130. Dacă micșorăm deîmpărțitul de un număr de ori și mărim împărțitorul de același număr de ori, cîtul se micșorează de acel număr de ori la pătrat.
a) $(720 : 2) : (4 \times 2) = 180 : (2 \times 2) = 180 : 4 = 45$;
b) $(720 : 3) : (4 \times 3) = 180 : (3 \times 3) = 180 : 9 = 20$;

c) $(720 : 6) : (4 \times 6) = 180 : (6 \times 6) = 180 : 36 = 5$;
În general: $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Rightarrow (a : d) : (b \times d) = \boldsymbol{c} : (d \times d)$.

131. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{matrix} 157\,248 = 471\,744 : 3 \\ 1\,512 = 504 \times 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 157\,248 : 1\,512 = 936 : (3 \times 3) = 936 : 9 = 104$;

b) $\left.\begin{matrix} 235\,872 = 471\,744 : 2 \\ 1\,008 = 504 \times 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 235\,872 : 1\,008 = 936 : (2 \times 2) = 936 : 4 = 234$;

c) $\left.\begin{matrix} 78\,624 = 471\,744 : 6 \\ 3\,024 = 504 \times 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 78\,624 : 3\,024 = 936 : (6 \times 6) = 936 : 36 = 26$.

132. Dacă mărim deîmpărțitul de ***d*** ori iar împărțitorul îl micșorăm de ***e*** ori, cîtul se mărește de ***d × e*** ori.

a) $(2\,640 \times 4) : (24 : 2) = 110 \times (4 \times 2) = 110 \times 8 = 880$;
b) $(2\,640 \times 3) : (24 : 2) = 110 \times (3 \times 2) = 110 \times 6 = 660$;
c) $(2\,640 \times 2) : (24 : 3) = 110 \times (2 \times 3) = 110 \times 6 = 660$.
În general: $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Rightarrow (a \times d) : (b : e) = \boldsymbol{c} \times (d \times e)$.

133. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{matrix} 220\,736 = 110\,368 \times 2 \\ 97 = 388 : 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 220\,736 : 97 = 286 \times (2 \times 4) = 286 \times 8 = 2\,288$;

b) $\left.\begin{matrix} 331\,104 = 110\,368 \times 3 \\ 194 = 388 : 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 331\,104 : 194 = 286 \times (3 \times 2) = 286 \times 6 = 1\,716$;

c) $\left.\begin{matrix} 441\,472 = 110\,368 \times 4 \\ 194 = 388 : 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 441\,472 : 194 = 286 \times (4 \times 2) = 286 \times 8 = 2\,288$;

134. Dacă micșorăm deîmpărțitul de ***d*** ori și mărim împărțitorul de ***e*** ori, cîtul se micșorează de ***d × e*** ori.

a) $(10\,656 : 2) : (24 \times 3) = 444 : (2 \times 3) = 444 : 6 = 74$;
b) $(10\,656 : 6) : (24 \times 2) = 444 : (6 \times 2) = 444 : 12 = 37$;
c) $(10\,656 : 3) : (24 \times 2) = 444 : (3 \times 2) = 444 : 6 = 74$;
În general: $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Rightarrow (a : d) : (b \times e) = \boldsymbol{c} : (d \times e)$.

135. Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{matrix} 4\,704 = 18\,816 : 4 \\ 168 = 84 \times 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\,704 : 168 = 224 : (4 \times 2) = 224 : 8 = 28$;

b) $\left.\begin{matrix} 2\,352 = 18\,816 : 8 \\ 168 = 84 \times 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\,352 : 168 = 224 : (8 \times 2) = 224 : 16 = 14$;

c) $\left.\begin{matrix} 9\,408 = 18\,816 : 2 \\ 336 = 84 \times 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 9\,408 : 336 = 224 : (2 \times 4) = 224 : 8 = 28$.

136. Dacă mărim ambii termeni ai unei împărțiri, primul de ***a*** ori, al doilea de ***b*** ori, atunci:

- cîtul se mărește de ***c*** ori, dacă $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$;
- cîtul se micșorează de ***d*** ori, dacă $\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}$.

a) $(21\,384 \times 6) : (594 \times 3) = 36 \times (6 : 3) = 36 \times 2 = 72$;
b) $(21\,384 \times 3) : (594 \times 6) = 36 : (6 : 3) = 36 : 2 = 18$;
c) $(21\,384 \times 9) : (594 \times 3) = 36 \times (9 : 3) = 36 \times 2 = 108$.

137. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{matrix} 87\,552=43\,776\times 2 \\ 3\,648=912\times 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 87\,552 : 3\,648 = 48 : (4 : 2) = 48 : 2 = 24;$

b) $\left.\begin{matrix} 175\,104=43\,776\times 4 \\ 1\,824=912\times 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 175\,104 : 1\,824 = 48 \times (4 : 2) = 48 \times 2 = 96;$

c) $\left.\begin{matrix} 87\,552=43\,776\times 2 \\ 5\,472=912\times 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 87\,552 : 5\,472 = 48 : (6 : 2) = 48 : 3 = 16.$

138. Dacă micșorăm ambii termeni ai unei împărțiri, primul de a ori, al doilea de b ori, atunci:

– cîtul se micșorează de c ori, dacă $a : b = c$;

– cîtul se mărește de d ori, dacă $b : a = d$.

a) $(30\,752 : 4) : (248 : 2) = 124 : (4 : 2) = 124 : 2 = 62;$

b) $(30\,752 : 2) : (248 : 4) = 124 \times (4 : 2) = 124 \times 2 = 248;$

c) $(30\,752 : 4) : (248 : 8) = 124 \times (8 : 4) = 124 \times 2 = 248.$

139. Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{matrix} 384=3\,072:8 \\ 96=384:4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 384 : 96 = 8 : (8 : 4) = 8 : 2 = 4;$

b) $\left.\begin{matrix} 768=3\,072:4 \\ 192=384:2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 768 : 192 = 8 : (4 : 2) = 8 : 2 = 4;$

c) $\left.\begin{matrix} 1\,536=3\,072:2 \\ 96=384:4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1\,536 : 96 = 8 \times (4 : 2) = 8 \times 2 = 16.$

I. D.

140. a) Rezolvarea 1

Deoarece $1\,111 = 1\,110 + 1$, iar $1\,009 = 1\,009 \Rightarrow (1\,009 + 1) + 101 = 1\,111;$

Rezolvarea 2 (Poate fi considerat un exercițiu cu x)

$1\,009 \;\square\; a = 1\,111 - 101 \Leftrightarrow 1\,009 \;\square\; a = 1\,010$ Evident, $1\,009 + 1 = 1\,010;$

b) Rezolvarea 1

Deoarece $1\,118 = 1\,110 + 8$, iar $1\,009 = 109 \Rightarrow 1\,009 + (101 + 8) = 1\,118;$

Rezolvarea 2 (Poate fi considerat un exercițiu cu x)

$101 \;\square\; a = 1\,118 - 1\,009 \Leftrightarrow 101 \;\square\; a = 109$. Evident, $101 + 8 = 109.$

141. a) Rezolvarea 1

Deoarece $504 = 513 - 9$, iar $184 = 184 \Rightarrow (329 - 9) + 184 = 504;$

Rezolvarea 2

$329 \;\square\; a = 504 - 184 \Leftrightarrow 329 \;\square\; a = 320 \Leftrightarrow 329 - 9 = 320.$

b) Rezolvarea 1

Deoarece $509 = 513 - 4$, iar $329 = 329 \Rightarrow 329 + (184 - 4) = 509;$

Rezolvarea 2

$184 \;\square\; a = 509 - 329 \Leftrightarrow 184 \;\square\; a = 180$. Evident, $184 - 4 = 180.$

142. a) Rezolvarea 1

Deoarece $7\,119 = 7\,115 + 4$, rezultă $a + a = 4$, iar $a = 2$. Atunci $(718 + 2) + (6\,397 + 2) = 7\,119;$

Rezolvarea 2

Evident, în pătratul liber nu pot fi scrise semnele operației de înmulțire sau de împărțire (operații de ordinul al doilea). Atunci:

$(718 \square a)+(6\ 397 \square a)=7\ 119 \Leftrightarrow 718+6\ 937 \square a \square a=7\ 119 \Leftrightarrow$ $7\ 115 \square a \square a=7\ 119$. Rezultă $7\ 115+4=7\ 119$, iar $a=2$.

b) Rezolvarea 1

$7\ 135=7\ 115+20 \Rightarrow a+a=20$, iar $a=10$. Deci $(718+10)+(6\ 397+10)=7\ 135$;

Rezolvarea 2

Evident, nu avem operații de ordinul al doilea. Atunci:

$718+6\ 397 \square a \square a=7\ 135 \Leftrightarrow 7\ 115 \square a \square a=7\ 135$. Rezultă $7\ 115+20=7\ 135$, iar $a=10$.

143. a) Rezolvarea 1

Deoarece $608=612-4$, rezultă $2a=4$, iar $a=2$; deci: $(514-2)+(98-2)=608$;

Rezolvarea 2

$514+98 \square a \square a=608 \Leftrightarrow 612 \square a \square a=608$; $612-4=608$, iar $a=2$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $602=612-10 \Rightarrow 2a=10$, iar $a=5$; deci: $(514-5)+(98-5)=602$;

Rezolvarea 2

$514+98 \square a \square a=602 \Leftrightarrow 612 \square a \square a=602 \Rightarrow 612-10=602$, iar $612-5-5=602$.

144. a) Rezolvarea 1

Deoarece $205=202+3 \Rightarrow a+b=3$. Rezultă $(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}$.

Rezolvarea 2

$103+99+a+b=202+a+b=205 \Rightarrow a+b=3$, iar $(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $208=202+6 \Rightarrow a+b=6$, iar $(a,b)\in\{(1,5),(2,4),(4,2),(5,1)\}$ etc.

145. a) Rezolvarea 1

Deoarece $2\ 511=2\ 515-4 \Rightarrow a+b=4$, iar $(a,b)\in\{(1,3),(3,1)\}$;

Rezolvarea 2

$2\ 129+386-a-b=2\ 511 \Rightarrow 2\ 515-a-b=2\ 511 \Rightarrow a+b=4$, iar $(a,b)\in\{(1,3),(3,1)\}$.

b) Rezolvarea 2

Deoarece $2\ 510=2\ 515-5 \Rightarrow a+b=5$, iar $(a,b)\in\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

Rezolvarea 2

$2\ 129+386-a-b=2\ 510 \Rightarrow 2\ 515-(a+b)=2\ 510 \Rightarrow a+b=5$, iar $(a,b)\in\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$.

146. a) Rezolvarea 1

Deoarece $1\ 602 = 1\ 601 + 1 \Rightarrow a - b = 1$. Din scrierea $(5 - b) \in N \Rightarrow b \leq 5$. Dacă $b = 5$, atunci $a = 6$. Dacă $b = 4$, atunci $a = 5$. Dacă $b = 3$, atunci $a = 4$. Dacă $b = 2$, atunci $a = 3$. Dacă $b = 1$, atunci $a = 2$. Pe scurt: $(a,b) \in \{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)\}$.

Rezolvarea 2

Din $(5 - b) \in N \Rightarrow b \leq 5$. Știind că prin scăderea unui termen din sumă se obține celălalt termen, putem scrie:

$5 - b = 1\ 602 - 1\ 596 - a \Leftrightarrow 5 - b = 6 - a$. Descăzutul este egal cu scăzătorul plus diferența, adică: $6 = a + (5 - b) \Leftrightarrow 6 = 5 + a - b / - 5 \Leftrightarrow 1 = a - b$.

Din $a - b = 1$, $b \leq 5$ și $a \neq b \neq 0$, rezultă: $(a,b) \in \{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)\}$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $1\ 599 = 1\ 601 - 2 \Rightarrow b - a = 2$. Din scrierea $5 - b \in N \Rightarrow b \leq 5$. Rezultă perechile ordonate: $(b,a) \in \{(3,1),(4,2),(5,3)\}$.

Rezolvarea 2

$5 - b = 1\ 599 - 1\ 596 - a \Leftrightarrow 5 - b = 3 - a \Leftrightarrow 5 = 3 - a + b \Leftrightarrow 5 = 3 + b - a \Leftrightarrow 2 = b - a$. Din $a \neq b \neq 0$, $b - a = 2$ și $b \leq 5$, rezultă următoarele cupluri: $(b,a) \in \{(3,1),(4,2),(5,3)\}$.

147. a) Rezolvarea 1

Deoarece unul dintre termeni se mărește cu același număr cu care se micșorează celălalt termen, rezultă că suma rămîne neschimbată. Deci $b = 517$. Deci $(348 + a) + (169 - a) = 517$. Din $(169 - a) \in N \Rightarrow a \leq 169$, adică $a \in \{1,2,3...\ 168,\ 169\}$.

Rezolvarea 2

$169 - a = b - (348 + a)$, căci $t_2 = S - t_1$. $169 - a = b - 348 - a / + a \Rightarrow 169 = b - 348 \Leftrightarrow b = 348 + 169 \Leftrightarrow b = 517$. Din $(169 - a) \in N \Rightarrow a \leq 169$. Deoarece $a \neq b \neq 0$, rezultă $a \in \{1,2,3,...\ 168,169\}$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece unul dintre termeni se micșorează cu același număr cu care se mărește celălalt termen, rezultă că suma rămîne neschimbată. Deci $b = 517$. Din $(348 - a) \in N \Rightarrow a \leq 348$. Deoarece $a \neq b \neq 0$, rezultă $a \in \{1,2,3...\ 347,\ 348\}$

Rezolvarea 2

$348 - a = b - 169 - a / + a \Leftrightarrow 348 = b - 169 \Leftrightarrow b = 348 + 169 \Leftrightarrow b = 517$. Din $(348 - a) \in N$ și $a \neq b \neq 0$, rezultă $a \in \{1,2,3,...\ ,\ 347,\ 348\}$.

148. a) Rezolvarea 1

Deoarece $7\ 877 = 7\ 843 + 4 \Rightarrow (17\ 502 + 4) - 9\ 629 = 7\ 877$.

Rezolvarea 2

Deoarece descăzutul este egal cu diferența plus restul, rezultă:

$17\ 502 \square a = 7\ 877 + 9\ 629 \Leftrightarrow 17\ 502 \square a = 17\ 506$. Evident, pentru a obține suma de 17 506, la 17 502 trebuie să adunăm 4. Deci: $(17\ 502 + 4) - 9\ 629 = 7\ 877$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $7\ 973 = 7\ 873 + 100 \Rightarrow (17\ 502 + 100) - 9\ 629 = 7\ 973$.

Rezolvarea 2

$17\ 502 \square a = 7\ 973 + 9\ 629 \Leftrightarrow 17\ 502 \square a = 17\ 602$.

Evident, $17\ 502 + 100 = 17\ 602$.

149. a) Rezolvarea 1

Deoarece $13\ 403 = 13\ 407 - 4 \Rightarrow (21\ 004 - 4) - 7\ 597 = 13\ 403$.

Rezolvarea 2

$21\ 004 \square a = 7\ 597 + 13\ 403 \Leftrightarrow 21\ 004 \square a = 21\ 000$.

Evident, $21\ 004 - 4 = 21\ 000$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $12\ 407 = 13\ 407 - 1\ 000 \Rightarrow (21\ 004 - 1\ 000) - 7\ 597 = 12\ 407$.

Rezolvarea 2

$21\ 004 \square a = 12\ 407 + 7\ 597 \Leftrightarrow 21\ 004 \square a = 20\ 004$. Evident, $21\ 004 - 1\ 000 = 20\ 004$. Deci: $(21\ 004 - 1\ 000) - 7\ 597 = 13\ 403$.

150. a) Rezolvarea 1

Deoarece $1\ 917 = 1\ 918 - 1 \Rightarrow 2\ 907 - (989 + 1) = 1\ 917$.

Rezolvarea 2

Scăzătorul se obţine prin scăderea diferenţei din descăzut, adică:

$989 \square a = 2\ 907 - 1\ 917 \Leftrightarrow 989 \square a = 990$. Evident, $989 + 1 = 990$, iar $2\ 907 - (989 + 1) = 1\ 917$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $1\ 908 = 1\ 918 - 10$, rezultă că $2\ 907 - (989 + 10) = 1\ 908$.

Rezolvarea 2

$989 \square a = 2\ 907 - 1\ 908 \Leftrightarrow 989 \square a = 999$. Evident, $989 + 10 = 999$, iar $2\ 907 - (989 + 10) = 1\ 908$.

151. a) Rezolvarea 1

Deoarece $2\ 029 = 2\ 026 + 3 \Rightarrow 11\ 002 - (8\ 976 - 3) = 2\ 029$.

Rezolvarea 2

$8\ 976 \square a = 11\ 002 - 2\ 029 \Leftrightarrow 8\ 976 \square a = 8\ 973$. Evident, $8\ 976 - 3 = 8\ 973$, iar $11\ 002 - (8\ 976 - 3) = 2\ 029$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $2\ 126 = 2\ 026 + 100 \Rightarrow 11\ 002 - (8\ 976 - 100) = 2\ 126$.

Rezolvarea 2

$8\ 976 \square a = 11\ 002 - 2\ 126 \Leftrightarrow 8\ 976 \square a = 8\ 876$. Evident, $8\ 976 - 100 = 8\ 876$, iar $11\ 002 - (8\ 976 - 100) = 2\ 126$.

152. a) Rezolvarea 1

Deoarece atît descăzutul cît şi scăzătorul se măresc cu acelaşi număr, rezultă că diferenţa rămîne neschimbată, deci $b = 779$. Conform enunţului, $a \neq b \neq 0$, rezultă că a poate fi orice număr natural diferit de 0 şi de 779.

Rezolvarea 2

$1\ 704+a=925+a+b/-a \Leftrightarrow 1\ 704=925+b \Leftrightarrow b=1\ 704-925 \Rightarrow b=779$.
Deoarece $a \neq b \neq 0$, rezultă $a \in N^* - \{779\}$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece atît descăzutul cît și scăzătorul se micșorează cu același număr, rezultă că diferența rămîne neschimbată, deci $b=779$. Din $a \neq b \neq 0$ și din $(925-a) \in N$, rezultă că $a \leq 925$ și $0 \neq a \neq 779$, adică a poate fi orice număr natural cel mult egal cu 925, care e diferit de 0 și de 779.

Rezolvarea 2

$1\ 704-a=925-a+b/+a \Leftrightarrow 1\ 704=925+b \Rightarrow b=1\ 704-925 \Leftrightarrow b=779$.
Din $(925-a) \in N$ și din $a \neq b \neq 0$, rezultă că a poate fi orice număr natural cel mult egal cu 925, care e diferit de 0 și de 779.

153. Rezolvarea 1

Deoarece $(3-a) \in N$, iar $a \neq 0$, rezultă că $a \in \{1,2,3\}$. Dacă descăzutul s-a mărit cu același număr cu care s-a micșorat scăzătorul, rezultă că diferența s-a mărit cu dublul acelui număr. Dacă $a=1$, atunci $b=997+2 \times 1=999$. Dacă $a=2$, atunci $b=997+2 \times 2=1\ 001$. Dacă $a=3$, atunci $b=997+3 \times \times 2=1\ 003$.

Rezolvarea 2

$1\ 000+a=3-a+b/+a \Leftrightarrow 1\ 000+2a=3+b/-3 \Leftrightarrow 997+2a=b$ Din $a \neq 0$ și $(3-a) \in N \Rightarrow a \in \{1,2,3\}$ Deci: $997+2 \times 1=999$; $997+2 \times 2=1\ 001$; $997+2 \times 3=1\ 003$.

154. a) Rezolvarea 1

Deoarece $1\ 013=1\ 009+4$, pe baza concluziei de la exercițiul anterior, deducem că $2a=4$, iar $a=2$.

Rezolvarea 2

$1\ 993-a=3\ 002+a-1\ 013 \Leftrightarrow 1\ 993-a=1\ 989+a/+a \Rightarrow$
$1\ 993=1\ 989+2a \Leftrightarrow 2a=4$; $a=2$.

b) Asemănător cu exercițiul anterior. $2a=2$, iar $a=1$.

155. a) Rezolvarea 1

Deoarece descăzutul s-a micșorat cu același număr cu care s-a mărit scăzătorul, rezultă că diferența s-a micșorat cu dublul acelui număr, adică: $2a=13-7 \Leftrightarrow 2a=6$; $a=3$.

Rezolvarea 2

Descăzutul este egal cu suma dintre diferență și scăzător, adică: $17-a=7+4+a \Leftrightarrow 17-a=11+a\ /+a \Leftrightarrow 17=11+2a \Rightarrow 2a=17-11 \Leftrightarrow 2a \Rightarrow a=3$.

b) Asemănător cu exercițiul precedent: $2a=13-9 \Leftrightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$.

156. Rezolvarea 1

Pe baza regulii anterioare, deducem că diferența 5 se micșorează cu dublul lui a, adică $2-2a=b$. Rezultă $2a<5$, iar $0<a \leq 2$. Dacă $a=1$, atunci $b=5-2 \times 1=3$. Dacă $a=2$, atunci $b=5-2 \times 2=1$.

Rezolvarea 2

$12-a=7+a+b/+a \Leftrightarrow 12=7+2a+b/+7 \Leftrightarrow 5=2a+b$, în care $a\neq b\neq 0$. Rezultă: $(a,b)\in\{(1,3),(2,1)\}$.

157. Asemănător cu exercițiul anterior. $34-2a=b \Rightarrow 2a<34$, iar $0<a<17$, căci $34-2a=b \Rightarrow 2a<34$, iar $0<a<17$, căci $b\neq 0$. Rezultă: $(a,b)\in\{(1,32),(2,30),(3,28),(4,26),(5,24),(6,22),(7,20),(8,18),(9,16),(10,14),(11,12),(12,10),(13,8),(14,6),(15,4),(16,2)\}$.

158. a) Rezolvarea 1

Deoarece $90=87+3 \Rightarrow a+b=3$. (Diferența se mărește cu $a+b$, căci descăzutul se mărește, iar scăzătorul se micșorează). Dacă $a\neq b\neq 0 \Rightarrow (a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}$.

Rezolvarea 2

$136+a=49-b+90 \Leftrightarrow 136+a=139-b/-136 \Leftrightarrow a=3-b \Rightarrow a+b=3$. Dacă $a\neq b\neq 0$, rezultă: $(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}$.

b) Asemănător cu exercițiul precedent:

$a+b=91-87 \Leftrightarrow a+b=4$. Deoarece $a\neq b\neq 0$, rezultă $(a,b)\in\{(1,3),(3,1)\}$.

159. a) Rezolvarea 1

Deoarece $460=463-3 \Rightarrow a+b=3$. (Diferența se micșorează cu $a+b$, căci descăzutul se micșorează, iar scăzătorul se mărește). Dacă $a\neq b\neq 0$, rezultă $(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}$.

Rezolvarea 2

$857-a=394+b+460 \Leftrightarrow 857-a=854+b/-854 \Leftrightarrow 3-a=b \Rightarrow a+b=3$. Dacă $a\neq b\neq 0 \Rightarrow (a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}$.

b) Asemănător cu exercițiul precedent: $(a,b)\in\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

160. a) Rezolvarea 1

Deoarece $250=249+1 \Rightarrow a-b=1$. (Dacă diferența s-a mărit cu 1, înseamnă că numărul cu care s-a mărit descăzutul este mai mare decît numărul cu care s-a mărit scăzătorul cu 1). Deci: $(a,b)\in\{(2,1),(3,2),(4,3),\ldots(n, n-1)\}$.

Rezolvarea 2

$836+a=587+b+250 \Leftrightarrow 836+a=837+b/-836 \Leftrightarrow a=b+1$. Apoi, ca la rezolvarea 1.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $247=249-2 \Rightarrow b-a=2$. (Dacă diferența s-a micșorat cu 2, înseamnă că numărul cu care s-a mărit scăzătorul este mai mare cu 2 decît numărul cu care s-a mărit descăzutul). Dacă $a\neq 0$, rezultă $(b,a)\in\{(3,1),(4,2),(5,3),(6,4),\ldots(n,n-2)\}$.

Rezolvarea 2

$836+a=587+b+247 \Leftrightarrow 836+a=834+b/-834 \Leftrightarrow 2+a=b \Rightarrow b-a=2$. În continuare, ca la rezolvarea 1.

161. a) Deoarece $178=179-1 \Rightarrow a-b=1$. (Dacă diferența s-a micșorat cu 1, înseamnă că numărul cu care s-a micșorat descăzutul este mai mare cu 1

decît numărul cu care s-a micşorat scăzătorul.)
Din $b \neq 0$ şi din scrierea $824-b \Rightarrow 0<b\leq 824$.
Deci $(a,b)\in\{(2,1),(3,2),(4,3),\ldots (825,824)\}$.
b) Deoarece $182=179+3 \Rightarrow b-a=3$. (Dacă diferenţa s-a mărit cu 3, înseamnă că numărul cu care s-a micşorat descăzutul este mai mic cu 3 decît numărul cu care s-a micşorat scăzătorul.) Din $a\neq b\neq 0$ şi din scrierea $824-b \Rightarrow 0<b\leq 824$. Deci $(b,a)\in\{(824,821),(823,820),\ldots (4,1)\}$.

162. a) Rezolvarea 1
Deoarece $60=12\times 5$, iar $2=2$ şi $6=6 \Rightarrow a=5$.
Rezolvarea 2
$(2\times a)\times 6=60 \Leftrightarrow 2\times a=60 : 6 \Leftrightarrow 2\times a=10 \Leftrightarrow a=10 : 2 \Leftrightarrow a=5$.
Rezolvarea 3
Înmulţirea este asociativă şi comutativă, deci: $(2\times a)\times 6=60 \Leftrightarrow (2\times 6)\times a==60 \Leftrightarrow 12\times a=60 \Leftrightarrow a=60 : 12 \Rightarrow a=5$.
b) Rezolvarea 1
Deoarece $96=12\times 8$, iar $2=2$ şi $6=6 \Rightarrow a=8$.
Rezolvarea 2
$2\times(6\times a)=96 \Leftrightarrow 6\times a=96 : 2 \Leftrightarrow 6\times a=48 \Leftrightarrow a=48 : 6 \Rightarrow a=8$.
Rezolvarea 3
Înmulţirea este asociativă şi comutativă, deci: $2\times(6\times a)=96 \Leftrightarrow (2\times 6)\times a==96 \Leftrightarrow 12\times a=96 \Leftrightarrow a=96 : 12 \Leftrightarrow a=8$.

163. a) Rezolvarea 1
Deoarece $72=18\times 4$, iar $6=6 \Rightarrow 12 : a=12 : 4 \Rightarrow a=4$.
Rezolvarea 2
$(12 : a)\times 6=18 \Leftrightarrow 12 : a=18 : 6 \Leftrightarrow 12 : a=3 \Rightarrow a=4$.
b) Rezolvarea 1
Deoarece $72=24\times 3$, iar $12=12 \Rightarrow 6 : a=6 : 3 \Rightarrow a=3$.
Rezolvarea 2
$12\times(6 : a)=24 \Leftrightarrow 6 : a=24 : 12 \Leftrightarrow 6 : a=2 \Leftrightarrow a=6 : 2 \Rightarrow a=3$.

164. a) Rezolvarea 1
Deoarece $216=54\times 4$, iar $6=6$ şi $9=9 \Rightarrow a\times a=4$, iar $a=2$.
Rezolvarea 2
$f_1\times f_2=216$, în care $f_1=M_6$, iar $f_2=M_9$. Deoarece $216=2^3\times 3^3 \Rightarrow f_1=12$, iar $f_2=18$.
$f_1=12 \Leftrightarrow 6\times a=12 \Rightarrow a=12 : 6 \Leftrightarrow a=2$, iar $f_2=18 \Leftrightarrow 9\times a=18 \Rightarrow a=18 : 9 \Leftrightarrow a=2$.
Rezolvarea 3
Înmulţirea este asociativă şi comutativă, deci: $(6\times a)\times(9\times a)=216 \Leftrightarrow (6\times 9)\times(a\times a)=216 \Leftrightarrow 54\times(a\times a)=216 \Leftrightarrow a\times a=216 : 54 \Leftrightarrow a\times a=4 \Rightarrow a=2$.
b) Rezolvarea 1
Deoarece $486=54\times 9$, iar $6=6$ şi $9=9 \Rightarrow a\times a=9$, iar $a=3$.

<u>Rezolvarea 2</u>

$f_1 \times f_2 = 486$, în care $f_1 = M_6$, $f_2 = M_9$.
Deoarece $486 = 2 \times 3^5 \Rightarrow f_1 = 2 \times 3 \times a$, iar $f_2 = 9 \times a$.
Singura valoare ce convine pentru a este 3, căci $(2 \times 3 \times 3) \times (9 \times 3) = 486$.

<u>Rezolvarea 3</u>

Înmulțirea este asociativă și comutativă, deci: $(6 \times a) \times (9 \times a) = 486 \Leftrightarrow (6 \times 9) \times (a \times a) = 486 \Leftrightarrow 54 \times (a \times a) = 486 \Leftrightarrow a \times a = 486 : 54 \Leftrightarrow a \times a = 9 \Rightarrow a = 3$.

165. a) <u>Rezolvarea 1</u>

Deoarece $864 = 24 \times 36 \Rightarrow a \times a = 36$, iar $a = 6$.

<u>Rezolvarea 2</u>

$f_1 \times f_2 = 24 = 2^3 \times 3 \Rightarrow f_1 = 4$, iar $f_2 = 6$ (singurele valori ce convin, căci $a = a$).
Dacă $24 : a = 4 \Rightarrow a = 6$ și $36 : a = 6 \Rightarrow a = 6$.

b) <u>Rezolvarea 1</u>

Deoarece $864 = 54 \times 16 \Rightarrow a \times a = 16$, iar $a = 4$.

<u>Rezolvarea 2</u>

$f_1 \times f_2 = 54 = 2 \square 3^3 \Rightarrow f_1 = 6$, iar $f_2 = 9$ (valorile ce convin, căci $a = a$).
Dacă $24 : a = 6 \Rightarrow a = 4$ și $36 : a = 9 \Rightarrow a = 4$.

166. <u>Rezolvarea 1</u>

Dacă $a \neq 1$, din cele două egalități rezultă: $b = 96 : (a \times a) \Leftrightarrow b = (2^5 \times 3) : (a \times a)$.
Deci $a \neq 3$. Dacă $a = 2$, atunci $b = (2^5 \times 3) : (2 \times 2) \Leftrightarrow b = 24$.
Dacă $a = 2^2 = 4$, atunci $b = (2^5 \times 3) : (2^2 \times 2^2) \Leftrightarrow b = 6$.

<u>Rezolvarea 2</u>

Dacă $a \neq 1$, din a divide pe 8 și a divide pe 12, rezultă $a \in \{2,4\}$. Dacă $a = 2$, atunci $b = 24$. Dacă $a = 4$, atunci $b = 6$.

167. a) <u>Rezolvarea 1</u>

Deoarece $672 = 56 \times 12 \Rightarrow a \times b = 12$. Dacă $a \neq b \neq 1 \Rightarrow (a,b) \in \{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}$.

<u>Rezolvarea 2</u>

$a \neq b \neq 1 \neq 0$, $f_1 \times f_2 = 672 = 2^5 \times 3 \times 7$, în care $f_1 = M_7 < 672$, iar $f_2 = M_8 < 672$.
Rezultă: $(f_1,f_2) \in \{(14,18),(21,32),(28,24),(42,16)\}$ iar $(a,b) \in \{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}$.

b) <u>Rezolvarea 1</u>

Deoarece $336 = 56 \times 6 \Rightarrow a \times b = 6$. Dacă $a \neq b \neq 1 \Rightarrow (a,b) \in \{(2,3),(3,2)\}$.

<u>Rezolvarea 2</u>

$a \neq b \neq 1$; $f_1 \times f_2 = 336 = 2^4 \times 3 \times 7$, în care $f_1 = M_7 < 336$, iar $f_2 = M_8 < 336$.
Rezultă: $(f_1,f_2) \in \{(14,24),(21,16)\}$, iar $(a,b) \in \{(2,3),(3,2)\}$.

168. a) <u>Rezolvarea 1</u>

Deoarece $168 = 28 \times 6 \Rightarrow a \times b = 6$, în care b divide pe $14 \Rightarrow b = 2$, iar $a = 3$.

<u>Rezolvarea 2</u>

$f_1 \times f_2 = 28 = 2^2 \times 7 \Rightarrow 14 : b = 7 \Rightarrow b = 2$; $12 : a = 4 \Rightarrow a = 3$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $168=6\times28 \Rightarrow a\times b=28=2^2\times7$, în care b divide pe $14 \Rightarrow b=7$, iar $a=4$.

Rezolvarea 2

$f_1\times f_2=6=2\times3 \Rightarrow 14 : b=2 \Rightarrow b=7$; $12 : a=3 \Rightarrow a=4$.

169. a) Deoarece $(18 : a)\in N^*$, iar $a\neq1 \Rightarrow a\in\{2,3,6,9,18\}$, atunci $b=216$, deoarece produsul rămîne neschimbat.

b) Deoarece $(12 : a)\in N^*$, iar $a\neq1 \Rightarrow a\in\{2,3,4,6,12\}$, atunci $b=216$, deoarece produsul rămîne neschimbat.

170. a) Rezolvarea 1

Deoarece $72=36\times2 \Rightarrow a : b=2$. Din scrierea $(9 : b)\in N^* \Rightarrow b\in\{3,9\}$. Dacă $b=3$, atunci $a=2\times3=6$. Dacă $b=9$, atunci $a=2\times9=18$.

Rezolvarea 2

$f_1\times f_2=72=2^3\times3^2$, în care $f_1=M_4<72$, iar $f_2<9$, căci $b\neq1$. Dacă $9 : b<9 \Rightarrow b\in\{3.9\}$; dacă $b=3$, atunci $a=6$; dacă $b=9$, atunci $a=18$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $144=36\times4 \Rightarrow b : a=4$. Dacă $a\neq b\neq1$, din scrierea $4 : a\in N^* \Rightarrow a\in\{2,4\}$. Dacă $a=2$, atunci $b=2\times4=8$. Dacă $a=4$, atunci $b=4\times4=16$.

Rezolvarea 2

$f_1\times f_2=144=2^4\times3^2$, în care $f_1<4$, iar $f_2=M_9<144$. Dacă $4 : a<4$ și $a\neq b\neq1 \Rightarrow a\in\{2,4\}$. Dacă $a=2$, atunci $b=144 : (2\times9) \Leftrightarrow b=144 : 18 \Rightarrow b=8$. Dacă $a=4$, atunci $b=144 : (1\times9) \Leftrightarrow b=144 : 9 \Rightarrow b=16$.

171. a) Rezolvarea 1

Deoarecee $80-32=48 \Rightarrow 8\times a=48 \Leftrightarrow a=6$. (A se vedea și explicațiile de la exercițiul nr. 112). Sau: $(4+a)\times8=80 \Leftrightarrow 4\times8+8a=80 \Leftrightarrow 8a=80-32 \Leftrightarrow a=48 : 8 \Rightarrow a=6$.

Rezolvarea 2

$(4+a)\times8=80 \Leftrightarrow 4+a=80 : 8 \Leftrightarrow 4+a=10 \Leftrightarrow a=10-4 \Rightarrow a=6$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $60=32+28 \Rightarrow 4\times a=28 \Leftrightarrow a=7$; sau: $4\times8+4\times a=60 \Leftrightarrow 4\times a==60-32 \Leftrightarrow 4a=28 \Rightarrow a=7$.

Rezolvarea 2

$8+a=60 : 4 \Leftrightarrow 8+a=15 \Rightarrow a=15-8 \Leftrightarrow a=7$.

172. a) Rezolvarea 1

Deoarece $42=54-12 \Rightarrow 6\times a=12 \Leftrightarrow a=2$ sau $9\times6-6a=42 \Leftrightarrow 54-6a==42 \Leftrightarrow 6a=54-42 \Leftrightarrow 6a=12 \Rightarrow a=2$.

Rezolvarea 2

$(9-a)=42 : 6 \Leftrightarrow 9-a=7 \Leftrightarrow a=9-7 \Leftrightarrow a=2$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $18=54-36 \Rightarrow 9a=36 \Leftrightarrow a=36 : 9 \Leftrightarrow a=4$ sau $9\times6-9a=18 \Leftrightarrow 9a=54-18$; $9a=36 \Rightarrow a=4$.

Rezolvarea 2

$9\times(6-a)=18 \Leftrightarrow 6-a=18 : 9 \Leftrightarrow 6-a=2 \Leftrightarrow a=6-2 \Leftrightarrow a=4$.

173. Din enunț și din scrierea $(7-a) \in N^*$, rezultă $a \in \{2,3,4,5,6\}$, iar $(a,b) \in \{(2,40),(3,32),(4,24),(5,16),(6,8)\}$.

174. $(7+a) \times 8 = b \Leftrightarrow 7+a = b : 8$. Dacă $a>1$, rezultă $b : 8 > 7+1 \Leftrightarrow b : 8 > 8 \Rightarrow b = M_8 > 64$. Din $7+a=b : 8 \Rightarrow a = b : 8 - 7$. Din $b = M_8 > 64$ și $a = b : 8 - 7$, rezultă că: dacă $b=72$, atunci $a = 72 : 8 - 7 = 2$; dacă $b=80$, atunci $a = 80 : 8 - 7 = 3$; dacă $b=88$, atunci $a = 88 : 8 - 7 = 4$; dacă $b = 96$, atunci $a = 96 : 8 - 7 = 5$ ș.a.m.d. Deci $b = 8k$, în care $k>8$, atunci $a = 8k : 8 - 7 \Leftrightarrow a = k - 7$.

175. a) Rezolvarea 1

Deoarece $40 = 20 \times 2 \Rightarrow (460 \times 2) : 23 = 40$, deci $a=2$.

Rezolvarea 2

$460 \times a = 23 \times 40 \Leftrightarrow 460 \times a = 920 \Rightarrow a = 920 : 460 \Leftrightarrow a = 2$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $160 = 20 \times 8 \Rightarrow (460 \times 8) : 23 = 160$, deci $a=8$.

Rezolvarea 2

$460 \times a = 160 \times 23 \Leftrightarrow 460 \times a = 3\ 680 \Leftrightarrow a = 3\ 680 : 460 \Leftrightarrow a = 8$.

176. a) Rezolvarea 1

$42 = 7 \times 6 \Rightarrow (4\ 536 : 6) : 108 = 7$, deci $a=6$.

Rezolvarea 2

$4\ 536 : a = 7 \times 108 \Leftrightarrow 4\ 536 : a = 756 \Leftrightarrow a = 4\ 536 : 756 \Leftrightarrow a = 6$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $42 = 3 \times 14 \Rightarrow (4\ 536 : 14) : 108 = 3$, deci $a = 14$.

Rezolvarea 2

$4\ 536 : a = 3 \times 108 \Leftrightarrow 4\ 536 : a = 324 \Rightarrow a = 4\ 536 : 324 \Rightarrow a = 14$.

177. Rezolvarea 1

Din $0 \neq a \neq b \neq 1$ și din scrierea $(48 : a) : 8 = b$, rezultă $8 < 48 : a < 48$ și $(48 : a) \in \{16,24,32\}$. Dacă $48 : a = 16 \Rightarrow a = 48 : 16 \Leftrightarrow a = 3$, iar $b = 2$, căci $(48 : 3) : 8 = 2$. Dacă $48 : a = 24 \Rightarrow a = 48 : 24 \Leftrightarrow a = 2$, iar $b=3$, căci $(48 : 2) : 8 = 3$. Dacă $48 : a = 32 \Rightarrow a \notin N$.

Rezolvarea 2

$(48 : a) : 8 = b \Leftrightarrow (48 : 8) : a = b \Leftrightarrow 6 : a = b \Leftrightarrow a \times b = 6$. Din $0 \neq a \neq b \neq 1$, rezultă: dacă $a=3$, atunci $b=2$; dacă $a=2$, atunci $b=3$ sau $(48 : a) : 8 = n \Leftrightarrow 48 : a = 8 \times b \Leftrightarrow 48 = 8 \times a \times b \Leftrightarrow 6 = a \times b$. Deci $(a,b) \in \{(2,3),(3,2)\}$.

178. a) Rezolvarea 1

Deoarece $32 = 96 : 3 \Rightarrow 10\ 368 : (108 \times 3) = 32$, deci $a=3$.

Rezolvarea 2

$108 \times a = 10\ 368 : 32 \Leftrightarrow 108 \times a = 324 \Leftrightarrow a = 324 : 108 \Rightarrow a = 3$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $12 = 96 : 8 \Rightarrow 10\ 368 : (108 \times 8) = 12$, deci $a=8$.

Rezolvarea 2

$108 \times a = 10\ 368 : 12 \Leftrightarrow 108 \times a = 864 \Leftrightarrow a = 864 : 108 \Rightarrow a = 8$.

179. Rezolvarea 1

Din enunț rezultă că $4a$ divide 72 și $4<4a<72$. Deoarece $4a=M_4$, rezultă $4a\in\{8,12,24,36\}$, căci $b\neq a\neq 1$. Dacă $4a=8 \Rightarrow a=2$, iar $b=9$, căci $72:(4\times 2)=9$. Dacă $4a=12 \Rightarrow a=3$, iar $b=6$, căci $72:(4\times 3)=6$. Dacă $4a=24 \Rightarrow a=6$, iar $b=3$, căci $72:(4\times 6)=3$. Dacă $4a=36 \Rightarrow a=9$, iar $b=2$, căci $72:(4\times 9)=2$.

Rezolvarea 2

$72:(4\times a)=b \Leftrightarrow 72:4:a=b \Leftrightarrow 18:a=b \Leftrightarrow a\times b=18$. Deoarece $a\neq b\neq 1$, rezultă $(a,b)\in\{(2,9),(9,2),(3,6),(6,3)\}$ sau: Deoarece $d=c\times î \Rightarrow 72=4ab \Leftrightarrow 18=ab$. Din enunț rezultă $a\neq b\neq 1$. Dacă $a=2$, atunci $b=9$; dacă $a=9$, atunci $b=2$; dacă $a=3$, atunci $b=6$; dacă $a=6$, atunci $b=3$.

180. a) Rezolvarea 1

Deoarece $324=36\times 9 \Rightarrow 11\,664:(324:9)=324$, deci $a=9$.

Rezolvarea 2

$324:a=11\,664:324 \Leftrightarrow 324:a=36 \Leftrightarrow a=324:36 \Rightarrow a=9$.

Rezolvarea 3

$11\,664:(324:a)=324 \Leftrightarrow 11\,664:324\times a=324 \Leftrightarrow 36\times a=324 \Rightarrow a=324:6 \Rightarrow a=9$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $216=36\times 6$ rezultă $11\,664:(324:6)=216$, deci $a=6$.

Rezolvarea 2

$324:a=11\,664:216 \Leftrightarrow 324:a=54 \Rightarrow a=324:54 \Leftrightarrow a=6$.

Rezolvarea 3

$11\,664:(324:a)=216 \Leftrightarrow \quad 11\,664:324\times a=216 \Leftrightarrow \quad 36\times a=216 \Rightarrow a=216:36 \Rightarrow a=6$.

181. Rezolvarea 1

Din enunț rezultă că a divide pe 12 și $a\neq b\neq 1$. Deci $a\in\{2,3,4,6,12\}$.
Dacă $a=2$, atunci $b=8$, căci $48:(12:2)=8$;
dacă $a=3$, atunci $b=12$, căci $48:(12:3)=12$;
dacă $a=4$, atunci $b=16$, căci $48:(12:4)=16$;
dacă $a=6$, atunci $b=24$, căci $48:(12:6)=24$;
dacă $a=12$, atunci $b=48$, căci $48:(12:12)=48$.

Rezolvarea 2

$48:(12:a)=b \Leftrightarrow 48:12\times a=b \Leftrightarrow 4\times a=b$. Din enunț rezultă a divide pe 12, adică $a\in\{2,3,4,6,12\}$. Dacă:
$a=2 \Rightarrow b=4\times 2=8$;
$a=3 \Rightarrow b=4\times 3=12$;
$a=4 \Rightarrow b=4\times 4=16$;
$a=6 \Rightarrow b=6\times 4=24$;
$a=12 \Rightarrow b=4\times 12=48$.

182. Deoarece atît deîmpărțitul cît și împărțitorul se măresc de același număr de ori, cîtul rămîne neschimbat, deci $b=84$. Rezultă $a\in N^{*}-\{1,84\}$, deoarece $a\neq b\neq 1$.

183. Deoarece ambii termeni ai împărțirii se măresc de *a* ori, rezultă că *b* este tocmai cîtul (care rămîne neschimbat) la împărțirea 39 168 : 408 = 96. Deci $b=96$, iar $a \in N^* - \{1,96\}$, deoarece $a \neq b \neq 1$.

184. Deoarece ambii termeni ai împărțirii se micșorează de *a* ori, rezultă că *b* este tocmai cîtul (care rămîne neschimbat) la împărțirea 2 772 : 63 = 44; deci $b=44$, iar $a \in N^* - \{1,44\}$, deoarece $a \neq b \neq 1$.

185. a) Rezolvarea 1

Deoarece $324 = 36 \times 9 \Rightarrow a \times a = 9$, deci $a=3$.

Rezolvarea 2

$108 : a = 3\ 888 \times a \Leftrightarrow 108 : a = 12 \times a \Leftrightarrow 108 = 12 \times a \times a \Leftrightarrow a \times a = 108 : 12 \Leftrightarrow a \times a = 9 \Rightarrow a = 3$.

b) Deoarece $2\ 916 = 36 \times 81 \Rightarrow a \times a = 81$, deci $a=9$.

186. Deoarece deîmpărțitul este mărit, iar împărțitorul este micșorat de același număr de ori (*a*), rezultă că *b* este tocmai cîtul împărțirii nemodificate mărit de $a \times a$ ori. Deci 3 072 : 64 = 48, iar $b = 48 \times a \times a$. Din scrierea 64 : *a*, rezultă că *a* divide pe 64. Deci $a \in \{2,4,8,16,32\}$. Dacă:

$a=2$, $b=48 \times 4 = 192$;

$a=4$, $b=48 \times 16 = 768$;

$a=8$, $b=48 \times 64 = 3\ 072$;

$a=16$, $b=48 \times 256 = 12\ 288$;

$a=32$, $b=48 \times 1\ 024 = 49\ 152$.

187. a) Rezolvarea 1

Deoarece $18 = 72 : 4 \Rightarrow a \times a = 4$, iar $a=2$.

Rezolvarea 2

$8a = 576 : a : 18 \Leftrightarrow 8a = 32 : a \Rightarrow 32 = 8a \times a \Rightarrow 4 = a \times a \Rightarrow a = 2$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $8 = 72 \times 9 \Rightarrow a \times a = 9$, iar $a=3$.

Rezolvarea 2

$8 \times a = 576 : a : 8 \Leftrightarrow 8a = 72 : a \Leftrightarrow 8a = 72 : a 72 = 8a \times a \Leftrightarrow 9 = a \times a \Rightarrow a = 3$.

188. Rezolvarea 1

Deoarece deîmpărțitul a fost mărit, iar împărțitorul a fost micșorat de același număr de ori (*a*), cîtul s-a micșorat de $a \times a$ ori, deci $b = 36 : 2 : (a \times a) \Leftrightarrow b = 18 : (a \times a)$. Deci 18 se împarte exact la $a \times a$ sau $a \times a$ divide pe 18. Rezultă $a=3$, iar $b = 18 : (3 \times 3) \Leftrightarrow b = 2$.

Rezolvarea 2

$(36 : a) : (2 \times a) = b \Leftrightarrow 36 : a : 2 : a = b \Leftrightarrow 36 : 2 : (a \times a) = b \Leftrightarrow 18 : (a \times a) = b \Leftrightarrow 18 = a \times a \times b \Rightarrow a = 3$, iar $b=2$, căci $18 = 3 \times 3 \times 2$.

189. a) Rezolvarea 1

Deoarece $192 = 24 \times 8 \Rightarrow a \times b = 8$, în care *b* divide pe 58 și $a \neq b \neq 1$. Rezultă $a=4$ și $b=2$.

Rezolvarea 2

$(1\ 392 \times a) : (58 : b) = 192 \Leftrightarrow 1\ 392 \times a : 58 \times b = 192 \Leftrightarrow 1\ 392 : 58 \times a \times b = 192 \Leftrightarrow 24 \times a \times b = 192 \Leftrightarrow a \times b = 192 : 24 \Leftrightarrow a \times b = 8$.

Rezolvarea este apoi asemănătoare cu cea anterioară.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $2\ 088 = 24 \times 87 \Rightarrow a \times b = 87$, în care b divide pe 58 și $a \neq b \neq 1$. Deoarece $87 = 3 \times 29$, iar $58 = 2 \times 29$, rezultă $b = 29$, iar $a = 3$.

Rezolvarea 2

$(1\ 392 \times a) : (58 : b) = 2\ 088 \Leftrightarrow 1\ 392 \times a : 58 \times b = 2\ 088 \Leftrightarrow 1\ 392 : 58 \times \times a \times b = 2\ 088 \Leftrightarrow 24 \times a \times b = 2\ 088 \Leftrightarrow a \times b = 2\ 088 : 24 \Leftrightarrow a \times b = 87$. Deoarece b divide 58, iar $87 = 3 \times 29$, rezultă $b = 29$, iar $a = 3$.

190. a) Rezolvarea 1

Deoarece $24 = 4 \times 6 \Rightarrow a \times b = 6$. Dacă $a \neq b \neq 1$, rezultă $(a,b) \in \{(2,3),(3,2)\}$.

Rezolvarea 2

$(336 : a) : (14 \times b) = 4 \Leftrightarrow 336 : a : 14 : b = 4 \Leftrightarrow 336 : 14 : a : b = 4 \Leftrightarrow 24 : a : b = 4 \Leftrightarrow 24 = 4 \times a \times b \Leftrightarrow 6 = a \times b$. Dacă $a \neq b \neq 1$, rezultă $(a,b) \in \{(2,3),(3,2)\}$.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $24 = 3 \times 8 \Rightarrow a \times b = 8$. Dacă $a \neq b \neq 1$, rezultă $(a,b) \in \{(2,4),(4,2)\}$.

Rezolvarea 2

$(336 : a) : (14 \times b) = 3 \Leftrightarrow 336 : a : 14 : b = 3 \Leftrightarrow 336 : 14 : a : b = 3 \Leftrightarrow 24 : a : b = 3 \Leftrightarrow 24 = 3 \times a \times b \Leftrightarrow 8 = a \times b$. Deoarece $a \neq b \neq 1$, rezultă $(a,b) \in \{(2,4),(4,2)\}$.

191. a) Rezolvarea 1

Deoarece $54 = 27 \times 2 \Rightarrow a : b = 2 \Leftrightarrow a = 2b$. Deoarece $a \neq b \neq 1$, rezultă $(b,a) \in \{(2,4),(3,6),(4,8),(5,10),\dots, (n,2n)\}$.

Rezolvarea 2

$648 \times a = 54 \times 24 \times b \Leftrightarrow 648 \times a = 1\ 296 \times b \Rightarrow a = 1\ 296 \times b : 648 \Leftrightarrow a = 1\ 296 : 64 \times b \Leftrightarrow a = 2b$. În continuare se rezolvă ca mai sus.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $9 = 27 : 3 \Rightarrow b : a = 3 \Leftrightarrow b = 3a$. Deoarece $a \neq b \neq 1$, rezultă $(a,b) \in \{(2,6),(3,9),(4,12),\dots, (n,3n)\}$.

Rezolvarea 2

$648 \times a = 24 \times 9 \times b \Leftrightarrow 648 \times a = 216 \times b \Leftrightarrow 3a = b$. În continuare se rezolvă ca mai sus.

192. a) Rezolvarea 1

Deoarece $14 = 28 : 2 \Rightarrow a : b = 2 \Leftrightarrow a = 2b$, în care b divide pe 42 și $b \neq 1$. Rezultă $(b,a) \in \{(2,4),(3,6),(6,12),(7,14),(14,28),(21,42),(42,84)\}$.

Rezolvarea 2

$(1\ 176 : a) : (42 : b) = 14 \Leftrightarrow 1\ 176 : a : 42 \times b \Leftrightarrow 1\ 176 : 42 : a \times b = 14 \Leftrightarrow 28 : a \times b = 14 \Leftrightarrow b = 28 : 14 : a \Leftrightarrow b = 2 : a \Leftrightarrow a = 2b$. În continuare se rezolvă ca mai sus.

b) Rezolvarea 1

Deoarece $56 = 28 \times 2 \Rightarrow b : a = 2 \Leftrightarrow b = 2a$, în care b divide pe 42 și $a \neq 1$. Rezultă: $(b,a) \in \{(42,21),(14,7),(6,3)\}$.

Rezolvarea 2

$42 : b = 1\ 176 : a : 56 \Leftrightarrow 42 : b = 21 : a \Rightarrow b = 42 : (21 : a) \Rightarrow b = 42 : 21 \times$ $\times a \Rightarrow b = 2a$. Apoi se rezolvă ca mai sus.

I. E.

193. Folosim procedeul rotunjirii numerelor, adică adăugăm sau omitem unități de un anumit ordin pentru a obține zeci întregi, sute întregi etc. Obținem astfel operații mai ușor de efectuat.

a) $598 + 499 =$

Rotunjim termenii prin adăugarea la primul număr a 2 unități, iar la al doilea 1 și obținem: $600 + 500 = 1\ 100$. Scădem apoi ce am adăugat, adică $1\ 100 - 2 - 1 = 1\ 097$. Verificare $589 + 499 = 1\ 097$.

b) $305 + 298 =$

Rotunjim prin adaos al doilea termen, adică $305 + 300 = 605$. Scădem apoi cît am adăugat, adică $605 - 2 = 603$. Verificare: $305 + 298 = 603$. (Putem rotunji prin lipsă primul termen, adică $300 + 298 + 5 = 598 + 5 = 603$).

c) $69 + 51 =$

Rotunjim prin adaos primul termen și obținem $70 + 51 - 1 = 121 - 1 = 120$. Sau: rotunjim prin lipsă al doilea termen și obținem: $69 + 50 + 1 =$ $= 119 + 1 = 120$. Sau: rotunjim primul termen prin adaos, iar al doilea prin lipsă și obținem: $70 + 50 - 1 + 1 = 120 + 1 - 1 = 120$.

d) $85 + 19 =$

Rotunjim prin adaos al doilea termen și obținem: $85 + 20 - 1 = 105 - 1 =$ $= 104$. Verificare: $85 + 19 = 104$.

194. a) $51 - 8 =$

Rotunjind prin lipsă descăzutul, obținem: $50 - 8 + 1 = 42 + 1 = 43$. (Putem rotunji prin adaos scăzătorul: $51 - 10 + 2 = 41 + 2 = 43$).

b) $82 - 28 =$

Rotunjim prin lipsă descăzutul: $80 - 28 + 2 = 80 - 20 - 8 + 2 = 52 + 2 = 54$. Sau: rotunjim prin adaos scăzătorul: $82 - 30 + 2 = 52 + 2 = 54$.

c) $90 - 21 =$

Rotunjim prin lipsă scăzătorul: $90 - 20 - 1 = 70 - 1 = 69$.

d) $167 - 59 =$

Rotunjim prin adaos scăzătorul: $167 - 60 + 1 = 107 + 1 = 108$. (Putem rotunji și descăzutul: $170 - 59 - 3 = 111 - 3 = 108$). Verificare: $167 - 59 = 108$.

195. a) $846 \times 19 =$

Rotunjind pe 19 prin adaos cu 1, obținem: 846×20. Din rezultat scădem o dată numărul 846, adică: $846 \times 20 - 846 = 16\ 920 - 846 = 16\ 074$.

b) $69 \times 638 =$

Rotunjind pe 69 prin adăugarea lui 1, obținem: $638 \times 70 - 638 = 44\ 022$.

c) $3\ 698 \times 81 =$

Rotunjim pe 81, prin lipsă, cu 1. La produsul obținut adăugăm o dată numărul 3 698, adică: $3\ 698 \times 80 + 3\ 698 = 299\ 538$.

d) $747 \times 41 =$
Rotunjind prin lipsă numărul **41** obținem: $747 \times 40 + 747 = 30\ 627$.
e) $689 \times 9 =$
Rotunjind prin adaos pe **9**, obținem: $689 \times 10 - 689 = 6\ 890 - 689 = 6\ 201$.
f) $586 \times 99 =$
Rotunjim pe **99** prin adăugarea lui **1** și obținem:
$586 \times 100 - 586 = 58\ 600 - 586 = 58\ 014$.
g) $999 \times 637 =$
Rotunjim pe **999** prin adăugarea lui **1**. Obținem:
$1\ 000 \times 637 - 637 = 637\ 000 - 637 = 636\ 363$. Pe baza acestui procedeu putem găsi un alt procedeu: la înmulțirea unui număr de **3** cifre cu numărul **999**, obținem un produs format din **6** cifre, dintre care primele **3** cifre reprezintă numărul cu care am înmulțit, dar micșorat cu o unitate; următoarele **3** cifre «completează» pe cele dintîi pînă la **9**. Deci $637 \times 999 = ?$
Primele **3** cifre vor fi **636**, căci $637 - 1 = 636$. Pînă aici produsul este $\overline{636abc}$. Următoarele cifre le găsim pe baza acestora, adică: $6 + a = 9 \Rightarrow a = 3$; $3 + b = 9 \Rightarrow b = 6$; $6 + c = 9 \Rightarrow c = 3$. Deci produsul este **636 363**.
h) $101 \times 369 =$
Rotunjind prin lipsă primul factor, obținem:
$100 \times 369 + 369 = 36\ 900 + 369 = 37\ 269$. Verificare: $369 \times 101 = 37\ 269$.
i) $1\ 568 \times 10\ 001 =$
Rotunjind prin lipsă al doilea factor, obținem:
$1\ 568 \times 10\ 000 + 1\ 568 = 15\ 680\ 000 + 1\ 568 = 15\ 681\ 568$.

196. a) $11 \times 18 =$
Rotunjim pe **11** prin lipsă, obținînd: $10 \times 18 + 18 = 180 + 18 = 198$.
Pe baza acestui procedeu, putem obține un alt mod de aflare a produsului în acest caz: rezultatul este un număr de **3** cifre, astfel: ultima cifră a produsului este ultima cifră a numărului care trebuie înmulțit; prima cifră a produsului este prima cifră a numărului care trebuie înmulțit, iar cifra din mijloc a produsului este suma cifrelor numărului care trebuie înmulțit, adică $11 \times 18 = \overline{1(1+8)8} = 198$. Dacă la adunarea cifrelor numărului care trebuie înmulțit obținem un număr mai mare decît **9**, cifra din mijlocul produsului va fi cifra de la unitățile numărului obținut prin adunare, iar cifra de pe locul zecilor o transportăm și o adunăm cu prima cifră a numărului ce trebuie înmulțit, adică:

$$11 \times 46 = \overline{4(6+4)6} = 506 \quad \text{sau:} \quad 39 \times 11 = \overline{3(3+9)9} = 429.$$
(↑ 10; ↑ 12)

b) $36 \times 11 = 36 \times 10 + 36 = 360 + 36 = 396$ sau: $36 \times 11 = \overline{3(3+6)6} = 396$.

c) $111 \times 43 = 43 \times 100 + 43 \times 11 = 4\ 300 + \overline{4(4+3)3} = 4\ 300 + 473 = 4\ 773$.

d) $269 \times 111 = \overline{abcde}$; $e = 9$; $d = 5$, căci $6 + 9 = 15$; $c = 8$, căci $2 + 6 + 9 + 1$ (cifră de transport) $= 18$; $b = 9$, căci $2 + 6 + 1$ (cifră de transport) $= 9$, iar $a = 2$; deci $\overline{abcde} = 29\ 859$.

Alt exemplu: $896 \times 111 = \overline{abcde}$; $e = 6$; $d = 5$, căci $6 + 9 = 15$; $c = 4$, căci $8 + 9 + 6 + 1 = 24$; $b = 9$, căci $8 + 9 + 2$ (cifră de transport) $= 19$; $a = 9$, căci $8 + 1 = 9$ (Aplicarea acestui procedeu la înmulțirea cu 111 nu este avantajoasă).

197. a) $3\ 268 \times 5 =$

Înmulțim numărul 3 268 cu 10, iar rezultatul îl împărțim la 2, adică: $32\ 680 : 2 = 16\ 340$ (sau împărțim întîi la 2 și rezultatul îl înmulțim cu 10).

b) $5 \times 791 = 791 \times 10 : 2 = 7\ 910 : 2 = 3\ 955$.

c) $2\ 349 \times 50 =$

Înmulțim numărul 2 349 cu 100, iar rezultatul îl împărțim la 2, adică: $234\ 900 : 2 = 117\ 450$.

d) $50 \times 396 = 39\ 600 : 2 = 19\ 800$ (sau $396 : 2 \times 100 = 19\ 800$).

e) $24\ 869 \times 25 =$

Înmulțim numărul 24 869 cu 100, iar produsul obținut îl împărțim la 4, adică: $2\ 486\ 900 : 4 = 621\ 725$.

f) $25 \times 968 = 96\ 800 : 4 = 24\ 200$ (sau $968 : 4 \times 100 = 24\ 200$).

g) $998 \times 75 =$

Înmulțim numărul 998 cu 300, iar rezultatul îl împărțim la 4, adică: $998 \times 300 : 4 = 299\ 400 : 4 = 74\ 850$.

h) $317 \times 75 = 317 \times 300 : 4 = 951\ 000 : 4 = 23\ 775$.

i) $9\ 326 \times 125 =$

Înmulțim numărul 9 326 cu 1 000, iar rezultatul îl împărțim la 8, adică: $9\ 326\ 000 : 8 = 1\ 165\ 750$

j) $125 \times 438 = 438\ 000 : 8 = 54\ 750$

k) $3\ 148 \times 15 =$

Înmulțim numărul 3 148 cu 10, iar la rezultat adunăm jumătate din produsul obținut, adică: $31\ 480 + 31\ 480 : 2 = 31\ 480 + 15\ 740 = 47\ 220$.

l) $15 \times 739 = 7\ 390 + 7\ 390 : 2 = 11\ 085$.

198. a) $185 : 5 =$

Înmulțim numărul 185 cu 2, iar produsul obținut îl împărțim la 10, adică: $185 \times 2 : 10 = 370 : 10 = 37$.

b) $305 : 5 = 305 \times 2 : 10 = 610 : 10 = 61$.

c) $775 : 25 =$

Înmulțim numărul 775 cu 4, iar rezultatul îl împărțim la 100, adică: $775 \times 4 : 100 = 3\ 100 : 100 = 31$.

d) $1\ 950 : 25 = 1\ 950 \times 4 : 100 = 7\ 800 : 100 = 78$.

e) $2\ 750 : 50 =$

Înmulțim numărul 2 750 cu 2, iar rezultatul îl împărțim la 100, adică: $2\ 750 \times 2 : 100 = 5\ 500 : 100 = 55$.

f) $13\ 900 : 50 = 13\ 900 \times 2 : 100 = 27\ 800 : 100 = 278$. Sau:
$13\ 900 : 50 = 13\ 900 : 100 \times 2 = 139 \times 2 = 278$.

199. a) $5 \times 22 =$
Folosim procedeul înmulțirii succesive, descompunînd factorii în alți factori, adică: $5 \times 22 = 5 \times (2 \times 11) = 10 \times 11 = 110$. Alt exemplu:
$13 \times 55 = 13 \times (5 \times 11) = 65 \times 11 = 715$.

b) $45 \times 8 = 9 \times 5 \times 8 = 3 \times 3 \times (5 \times 8) = 3 \times (3 \times 40) = 3 \times 120 = 360$.

c) $65 \times 4 = 5 \times 13 \times 4 = 20 \times 13 = 260$

200. a) $224 : 32 =$
Folosim procedeul împărțirii succesive, descompunînd în factori împărțitorul, adică:
$224 : 2 : 2 : 2 : 2 : 2 = 112 : 2 : 2 : 2 : 2 = 56 : 2 : 2 : 2 = 28 : 2 : 2 =$
$= 14 : 2 = 7$.

b) $84 : 12 = 84 : 2 : 2 : 3 = 42 : 2 : 3 = 21 : 3 = 7$.

c) $256 : 64 = 256 : 8 : 8 = 32 : 8 = 4$.

d) $1\ 280 : 160 = 1\ 280 : 10 : 16 = 128 : 4 : 4 = 32 : 4 = 8$.

I. F.

201. a) Dacă adunăm același număr la fiecare dintre cei doi membri ai unei egalități de numere naturale, obținem o altă egalitate de numere naturale. Pe scurt, putem scrie: $16 = 16\ /+4 \Rightarrow 16 + 4 = 16 + 4 \Leftrightarrow 20 = 20$.

b) Dacă scădem același număr din fiecare membru al unei egalități de numere (atunci cînd scăderile se pot efectua), obținem o altă egalitate de numere naturale. Deci: $16 = 16\ /-4 \Rightarrow 16 - 4 = 16 - 4 \Leftrightarrow 12 = 12$.

c) Dacă înmulțim cu același număr natural fiecare membru al unei egalități de numere naturale, obținem o altă egalitate de numere naturale. Deci: $16 = 16\ /\times 4 \Rightarrow 16 \times 4 = 16 \times 4 \Leftrightarrow 64 = 64$.

d) Dacă împărțim la același număr natural fiecare membru al unei egalități de numere naturale (atunci cînd împărțirile exacte se pot efectua), obținem o altă egalitate de numere naturale. Deci: $16 = 16\ /:4 \Rightarrow 16 : 4 = 16 : 4 \Leftrightarrow$ $4 = 4$.

202. a) $32y = 32y\ /+4 \Rightarrow 32y + 4 = 32y + 4$.

b) $32y = 32y\ /-4 \Rightarrow 32y - 4 = 32y - 4$.

c) $32y = 32y\ /\times 4 \Rightarrow 32y \times 4 = 32y \times 4 \Leftrightarrow 128y = 128y$

d) $32y = 32y\ /:4 \Rightarrow 32y : 4 = 32y : 4 \Leftrightarrow 8y = 8y$.

203. a) $8 + 40 = 32 + 16\ /+4 \Rightarrow 8 + 40 + 4 = 32 + 16 + 4 \Leftrightarrow 52 = 52$.

b) $8 + 40 = 32 + 16\ /-4 \Rightarrow 8 + 40 - 4 = 32 + 16 - 4 \Leftrightarrow 44 = 44$.

c) $8 + 40 = 32 + 16\ /\times 4$ Cum se înmulțește o sumă cu un număr? Vedeți cele două răspunsuri la exercițiul nr. 25. Rezultă: $(8 + 40) \times 4 = (32 + 16) \times 4 \Leftrightarrow 48 \times 4 = 48 \times 4 \Leftrightarrow 192 = 192$ sau: $8 \times 4 + 40 \times 4 = 32 \times 4 + 16 \times 4 \Leftrightarrow 32 + 160 = 128 + 64 \Leftrightarrow 192 = 192$.

d) $8+40=32+16$ / : 4 Cum se împarte o sumă la un număr? Vedeți cele două răspunsuri la exercițiul nr. 52. Rezultă: $(8+40) : 4=(32+16) : 4 \Rightarrow 8 : 4+40 : 4=32 : 4+16 : 4 \Leftrightarrow 2+10=8+4 \Leftrightarrow 12=12$ sau: $48 : 4=48 : 4 \Leftrightarrow 12=12$.

204. a) $4+12+28=20+16+8$ $/+4 \Rightarrow$ $4+12+28+4=20+16+8+4 \Leftrightarrow 48=48$.

b) $4+12+28=20+16+8$ $/-4 \Leftrightarrow$ $4+12+28-4=20+16+8-4 \Leftrightarrow 40=40$.

c) $4+12+28=20+16+8$ $/\times 4 \Rightarrow$ $(4+12+28)\times 4=(20+16+8)\times 4 \Leftrightarrow 44\times 4=44\times 4 \Leftrightarrow 176=176$ sau: $4\times 4+12\times 4+28\times 4=20\times 4+16\times 4+8\times 4 \Leftrightarrow 16+48+112=80+64+32 \Leftrightarrow 176=176$.

d) $4+12+28=20+16+8$ / : 4 $\Rightarrow$ $(4+12+28) : 4=(20+16+8) : 4 \Leftrightarrow 44 : 4=44 : 4 \Leftrightarrow 11=11$; sau: $4 : 4+12 : 4+28 : 4=20 : 4+16 : 4+8 : 4 \Leftrightarrow$ $1+3+7=5+4+2 \Leftrightarrow 11=11$.

205. a) $48-32=32-16$ $/+4 \Rightarrow 48-32+4=32-16+4 \Leftrightarrow 20=20$.

b) $48-32=32-16$ $/-4 \Rightarrow 48-32-4=32-16-4 \Leftrightarrow 12=12$.

c) $48-32=32-16$ $/\times 4 \Rightarrow (48-32)\times 4=(32-16)\times 4 \Leftrightarrow 16\times 4=16\times 4 \Leftrightarrow 64=64$; sau: $48\times 4-32\times 4=32\times 4-16\times 4 \Leftrightarrow 192-128=128-64 \Leftrightarrow 64=64$.

d) $48-32=32-16$ / : 4 $\Rightarrow (48-32) : 4=(32-16) : 4 \Leftrightarrow 16 : 4=16 : 4 \Leftrightarrow 4=4$ sau: $48 : 4-32 : 4=32 : 4-16 : 4 \Leftrightarrow 12-8=8-4 \Leftrightarrow 4=4$.

206. a) $88-16-8=124-36-24$ $/+4 \Rightarrow 88-16-8+4=124-36-24+4 \Leftrightarrow 68=68$.

b) $88-16-8=124-36-24$ $/-4 \Rightarrow 88-16-8-4=124-36-24-4 \Leftrightarrow 88-(16+8+4)=124-(36+24+4) \Leftrightarrow 88-28=124-64 \Leftrightarrow 60=60$.

c) $88-16-8=124-36-24$ $/\times 4 \Rightarrow (88-16-8)\times 4=(124-36-24)\times 4 \Leftrightarrow 64\times 4=64\times 4 \Leftrightarrow 256=256$ sau: $88\times 4-16\times 4-8\times 4=124\times 4-36\times 4-24\times 4 \Leftrightarrow 352-64-32=496-144-96 \Leftrightarrow$ $352-(64+32)=496-(144+96) \Leftrightarrow 352-96=496-240 \Leftrightarrow 256=256$.

d) $88-16-8=124-36-24$ / : 4 $\Rightarrow (88-16-8) : 4=(124-36-24) : 4 \Leftrightarrow 64 : 4=64 : 4 \Leftrightarrow 16=16$ sau: $88 : 4-16 : 4-8 : 4=124 : 4-36 : 4-24 : 4 \Leftrightarrow 22-4-2=31-9-6 \Leftrightarrow 16=16$.

207. a) $1\,004+96-120=600-420+800$ $/+4 \Rightarrow$ $1\,004+96-120+4=600-420+800+4 \Leftrightarrow 984=984$.

b) $1\,004+96-120=600-420+800$ $/-4 \Rightarrow$ $1\,004+96-120-4=600-420+800-4 \Leftrightarrow 976=976$.

c) $1\,004+96-120=600-420+800$ $/\times 4 \Rightarrow$ $(1\,004+96-120)\times 4=(600-420+800)\times 4 \Leftrightarrow 980\times 4=980\times 4 \Leftrightarrow 3\,920=3\,920$ sau:

$1\ 004\times4+96\times4-120\times4=600\times4-420\times4+800\times4\Leftrightarrow$ $4\ 016+384-480=2\ 400-1\ 680+3\ 200\Leftrightarrow3\ 920=3\ 920.$

d) $1\ 004+96-120=600-420+800\ /:4\Rightarrow\ (1\ 004+96-$ $-120):4=(600-420+800):4\Leftrightarrow980:4=980:4\Leftrightarrow245=245$ sau: $1\ 004:4+96:4-120:4=600:4-420:4+800:4\Leftrightarrow251+24-30=$ $=150-105+200\Leftrightarrow245=245.$

208. a) $4\times7=14\times2\ /+4\Rightarrow4\times7+4=14\times2+4\Leftrightarrow28+4=28+4\Leftrightarrow32=32.$

b) $4\times7=14\times2\ /-4\Rightarrow4\times7-4=14\times2-4\Leftrightarrow24=24.$

c) $4\times7=14\times2\ /\times4\Rightarrow4\times7\times4=14\times2\times4\Leftrightarrow112=112.$

d) $4\times7=14\times2\ /:4\Rightarrow4\times7:4=14\times2:4\Leftrightarrow28:4=28:4\Leftrightarrow7=7.$

209. a) $16-4\times3=12\times16-188\ /+4\Rightarrow\ 16-4\times3+4=12\times16-188+4\Leftrightarrow$ $8=8.$

b) $16-4\times3=12\times16-188\ /-4\Rightarrow\ 16-4\times3-4=12\times16-188-4\Leftrightarrow$ $16-12-4=192-188-4\Leftrightarrow0=0$ sau: $16-(4\times3+4)=12\times16-(188+4)\Leftrightarrow\ 16-4(3+1)=12\times16-192\Leftrightarrow$ $16-4\times4=192-192\Leftrightarrow0=0.$

c) $16-4\times3=12\times16-188\ /\times4\Rightarrow(16-4\times3)\times4=(12\times16-188)\times4\Leftrightarrow$ $4\times4=4\times4\Leftrightarrow\ 16=16$ sau: $16\times4-4\times3\times4=12\times16\times4-188\times4\Leftrightarrow$ $4\times16-3\times16=192\times4-188\times4\Leftrightarrow\ 16\times(4-3)=4\times(192-188)\Leftrightarrow$ $16\times1=4\times4\Leftrightarrow16=16.$

d) $16-4\times3=12\times16-188\ /:8\Rightarrow(16-4\times3):4=(12\times16-188):4\Leftrightarrow$ $4:4=4:4\Leftrightarrow1=1$

sau: $16:4-4\times3:4=12\times16:4-188:4\Leftrightarrow\ 4-3=3\times16-47\Leftrightarrow$ $1=48-47\Leftrightarrow1=1.$

210. a) $352:8-12=96-768:12\ /+4\Rightarrow352:8-12+4=96-768:12+4\Leftrightarrow$ $36=36.$

b) $352:8-12=96-768:12\ /-4\Rightarrow352:8-12-4=96-768:12-4\Leftrightarrow$ $28=28.$

c) $352:8-12=96-768:12\ /\times4\Rightarrow\ (352:8-12)\times4=(96-768:12)\times$ $\times4\Leftrightarrow32\times4=32\times4\Leftrightarrow128=128.$

Sau: $352:8\times4-12\times4=96\times4-\ -768:12\times4\Leftrightarrow$ $352:2-12\times4=96\times4-768:3\Leftrightarrow176-48=384-\ -256\Leftrightarrow128=128.$

d) $352:8-12=96-768:12\ /:4\Rightarrow\ (352:8-12):4=(96-$ $-768:12):4\Leftrightarrow\ 32:4=32:4\Leftrightarrow\ 8=8.$ Sau: $352:686:4-12:4=$ $=96:4-768:12:4\Leftrightarrow352:32-12:4=96:4-768:48\Leftrightarrow11-3=$ $=24-16\Leftrightarrow8=8.$

211. a) $4a+8a+104a=32a+24a+60a\ /+4\Rightarrow116a+4=114a+4$

b) $4a+8a+104a=32a+24a+60a\ /-4\Rightarrow116a-4=114a-4$

c) $4a+8a+104a=32a+24a+60a\ /\times4\Rightarrow(4a+8a+104a)\times$ $\times4=(32a+24a+60a)\times4\Leftrightarrow116a\times4=114a\times4\Leftrightarrow464a=464a.$

Sau: $4a\times4+8a\times4+104a\times4=32a\times4+24a\times4+60a\times4\Leftrightarrow$ $16a+32a+416a=127a+96a+240a\Leftrightarrow464a=464a.$

d) $4a+8a+104a=32a+24a+60a \;/ : 4 \Leftrightarrow \;(4a+8a+104a) : 4=$
$=(32a+24a+60a) : 4 \Leftrightarrow \;116a : 4=116a : 4 \Leftrightarrow \;29a=29a$; sau:
$4a : 4+8a : 4+104a : 4=32a : 4+24a : 4+60a : 4 \Leftrightarrow \;a+2a+26a=$
$=8a+6a+15a \Leftrightarrow 29a=29a$.

212. a) $120x-80x=12x+28x \;/+4 \Rightarrow 40x+4=40x+4$.
b) $120x-80x=12x+28x \;/-4 \Rightarrow 40x-4=40x-4$.
c) $120x-80x=12x+28x \;/\times 4 \Rightarrow (120x-80x)\times 4=(12x+28x)\times 4 \Leftrightarrow 40x\times$
$\times 4=40x\times 4 \Leftrightarrow 160x=160x$; sau: $120x\times 4-80x\times 4=12x\times 4+28x\times 4 \Leftrightarrow$
$480x-320x=48x+112x \Leftrightarrow 160x=160x$.
d) $120x-80x=12x+28x \;/ : 4 \Rightarrow (120x-80x) : 4=(12x+28x) : 4 \Leftrightarrow 40x :$
$: 4=40x : 4 \Leftrightarrow \;10x=10x$; sau: $120x : 4-80x : 4=12x : 4+28x : 4 \Leftrightarrow$
$30x-20x=3x+7x \Leftrightarrow 10x=10x$.

213. a) $1\,036y+1\,024y-996y=10\,000y-9\,888y+952y \;/+4 \Rightarrow \;1\,064y+4=$
$=1\,064y+4$.
b) $1\,036y+1\,024y-996y=10\,000y-9\,888y+952y \;/-4 \Rightarrow \;1\,064y-4=$
$=1\,064y-4$ (numai pentru $y\neq 0$ avem numere naturale).
c) $1\,036y+1\,024y-996y=10\,000y-9\,888y+952y \;/\times 4 \Rightarrow \;(1\,036y+$
$+1\,024y-996y)\times 4=(10\,000y-9\,888y+952y)\times 4 \Leftrightarrow \;1\,064y\times 4=$
$=1\,064y\times 4 \Leftrightarrow \;4\,256y=4\,256y$; sau: se poate aplica distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere și apoi se efectuează calculele posibile.
d) $1\,036y+1\,024y-996y=10\,000y-9\,888y+952y \;/ : 4 \Rightarrow \;(1\,036y+$
$+1\,024y-996y) : 4=(10\,000y-9\,888y+952y) : 4 \Leftrightarrow \;1\,064y : 4=$
$=1\,064y : 4 \Leftrightarrow \;266y=266y$; sau: $1\,036y : 4+1\,024y : 4-996y : 4=$
$=10\,000y : 4-9\,888y : 4+952y : 4 \Leftrightarrow \;259y+256y-249y=2\,500y-$
$-2\,472y+238y \Leftrightarrow 266y=266y$.

214. a) $420+5\times 2\times 16y=160y+105\times 4 \;/+4 \Rightarrow 420+160y+4=160y+420+$
$+4 \Leftrightarrow 424+160y=160y+424$.
b) $420+5\times 2\times 16y=160y+105\times 4 \;/-4 \Rightarrow 416+160y=160y+416$.
c) $420+5\times 2\times 16y=160y+105\times 4 \;/\times 4 \Rightarrow (420+5\times 2\times 16y)\times$
$\times 4=(160y+105\times 4)\times 4 \Leftrightarrow \;420\times 4+160y\times 4=160y\times 4+420\times 4 \Leftrightarrow$
$1\,680+640y=640y+1\,680$.
d) $420+5\times 2\times 16y=160y+105\times 4 \;/ : 4 \Rightarrow \;(420+5\times 2\times 16y) : 4=$
$=(160y+105\times 4) : 4 \Leftrightarrow \;420 : 4+5\times 2\times 16y : 4=160y : 4+105\times 4 : 4 \Leftrightarrow$
$105+40y=40y+105$.

215. a) $90y+32=5\times 4\times 4y=8\times 14 \;/+4 \Rightarrow 90y+36=80y+116$.
b) $90y+32=5\times 4\times 4y+8\times 14 \;/-4 \Rightarrow 90y+28=80y+108$.
c) $90y+32=5\times 4\times 4y+8\times 14 \;/\times 4 \Rightarrow \;(90y+32)\times 4=(80y+112)\times 4 \Leftrightarrow$
$360+128=320y+448$.
d) $90y+32=5\times 4\times 4y+8\times 14 \;/ : 14 \Rightarrow (90y+32) : 4=$
$=(5\times 4\times 4y+8\times 14) : 4 \Leftrightarrow 90y : 4+32 : 4=5\times 4\times 4y : 4+8\times 14 : 4 \Leftrightarrow$
$90y : 4+8=20y+28$

216. a) $720y : 8+64=140y-36 \ /+4 \Rightarrow \ 720y : 8+68=140y-32 \ /+32 \Leftrightarrow$
$720y : 8+100=140y \Leftrightarrow 90y+100=140y.$
b) $720y : 8+64=140y-36 \ /-4 \Rightarrow \ 720y : 8+64-4=140y-36-4 \Leftrightarrow$
$720y : 8+60=140y-40 \ /+40 \Leftrightarrow \ 720y : 8+100=140y \Leftrightarrow$
$90y+100=140y.$
c) $720y : 8+64=140y-36 \ /\times 4 \Rightarrow (720y : 8+64)\times 4=(140y-36)\times 4 \Leftrightarrow$
$720y : 8\times 4+64\times 4=140y\times 4-36\times 4 \Leftrightarrow 720y : 2+256=560y-144 \Leftrightarrow$
$360y+256=560y-144.$
d) $720y : 8+64=140y-36 \ / : 4 \Rightarrow (720y : 8+64) : 4=(140y-36) : 4 \Leftrightarrow$
$720y : 8 : 4+64 : 4=140y : 4-36 : 4 \Leftrightarrow 90y : 4+16=35y-9.$

217. a) $48b-4=3\times 6b+4\times 14 \ /+4 \Rightarrow \ 48b-4+4=3\times 6b+56+4 \Leftrightarrow$
$48b=18b+60.$
b) $48b-4=3\times 6b+4\times 14 \ /-4 \Rightarrow \ 48b-4-4=3\times 6b+56-4 \Leftrightarrow$
$48b-8=18b+52.$
c) $48b-4=3\times 6b+4\times 14 \ /\times 4 \Rightarrow \ (48b-4)\times 4=(3\times 6b+56)\times 4 \Leftrightarrow$
$48b\times 4-4\times 4=3\times 6b\times 4+4\times 14\times 4 \Leftrightarrow 192b-16=72b+224.$
d) $48b-4=3\times 6b+4\times 14 \ / : 4 \Rightarrow \ (48b-4) : 4=(3\times 6b+4\times 14) : 4 \Leftrightarrow$
$48b : 4-4 : 4=6b\times 3 : 4+4\times 14 : 4 \Leftrightarrow 12b-1=18b : 4+14.$

218. a) $36b-24=2\times 4\times 9b-4\times 96 \ /+4 \Rightarrow \ 36b-24+4=72b-384+4 \Leftrightarrow$
$36b-20=72b-380.$
b) $36b-24=2\times 4\times 9b-4\times 96 \ /-4 \Rightarrow \ 36b-24-4=72b-384-4 \Leftrightarrow$
$36b-28=72b-388.$
c) $36b-24=2\times 4\times 9b-4\times 96 \ /\times 4 \Rightarrow (36b-24)\times 4=$
$=(2\times 4\times 9b-4\times 96)\times 4 \Leftrightarrow \ 36b\times 4-24\times 4=72b\times 4-4\times 96\times 4 \Leftrightarrow$
$144b-96=288b-1536.$
d) $36b-24=2\times 4\times 9b-4\times 96 \ / : 4 \Rightarrow (36b-24) : 4=$
$=(2\times 4\times 9b-4\times 96) : 4 \Leftrightarrow 36b : 4-24 : 4=2\times 4\times 9b : 4-4\times 96 : 4 \Leftrightarrow$
$9b-6=18b-96.$

219. a) $8x-28=4x+4 \ /+4 \Rightarrow 8x-28+4=4x+4+4 \Leftrightarrow 8x-24=4x+8.$
b) $8x-28=4x+4 \ /-4 \Rightarrow \ 8x-28-4=4x+4-4 \Leftrightarrow$
$8x-28-4=4x+4-4 \Leftrightarrow 8x-32=4x.$
c) $8x-28=4x+4 \ /\times 4 \Rightarrow \ (8x-28)\times 4=(4x+4)\times 4 \Leftrightarrow$
$8x\times 4-28\times 4=4x\times 4+4\times 4 \Leftrightarrow 32x-112=16x+16.$
d) $8x-28=4x+4 \ / : 4 \Rightarrow \ (8x-28) : 4=(4x+4) : 4 \Leftrightarrow$
$8x : 4-28 : 4=4x : 4+4 : 4 \Leftrightarrow 2x-7=x+1.$

220. a) $32x : 2+4=20x-60 \ /+4 \Rightarrow \ 32x : 2+4+4=20x-60+4 \Leftrightarrow$
$16x+8=20x-56.$
b) $32x : 2+4=20x-60 \ /-4 \Rightarrow 16x+4-4=20x-60-4 \Leftrightarrow 16x=20x-64.$
c) $32x : 2+4=20x-60 \ /\times 4 \Rightarrow \ (32x : 2+4)\times 4=(20x-60)\times 4 \Leftrightarrow$
$16x\times 4+4\times 4=20x\times 4-60\times 4 \Leftrightarrow 64x+16=80x-240.$
d) $32x : 2+4=20x-60 \ / : 4 \Rightarrow \ (32x : 2+4) : 4=(20x-60) : 4 \Leftrightarrow$
$32x : 2 : 4+4 : 4=20x : 4-60 : 4 \Leftrightarrow 4x+1=5x-15.$

221. a) $64x-140=112x:2+4\ /+4 \Rightarrow 64x-140+4=112x:2+4+4 \Leftrightarrow 64x-136=56x+8$.

b) $64x-140=112x:2+4\ /-4 \Rightarrow 64x-140-4=112x:2+4-4 \Leftrightarrow 64x-144=56x$.

c) $64x-140=112x:2+4\ /\times 4 \Rightarrow (64x-140)\times 4=(112x:2+4)\times 4 \Leftrightarrow 64x\times 4-140\times 4=112x:2\times 4+4\times 4 \Leftrightarrow 256x-560=56x\times 4+16 \Leftrightarrow 256x-560=224x+16$.

d) $64x-140=112x:2+4\ /:4 \Rightarrow (64x-140):4=(112x:2+4):4 \Leftrightarrow 64x:4-140:4=112x:2:4+4:4 \Leftrightarrow 16x-35=112x:8+1 \Leftrightarrow 16x-35=14x+1$.

222. a) $512:(4\times x)+24=8\times 9-32\ /+4 \Rightarrow 512:(4\times x)+24+4=8\times 9-32+4 \Leftrightarrow 512:(4\times x)+28=8\times 9-28 \Leftrightarrow 512:4:x+28=72-28 \Leftrightarrow 128:x+28=44$.

b) $512:(4\times x)+24=8\times 9-32\ /-4 \Rightarrow 512:(4\times x)+24-4=8\times 9-32-4 \Leftrightarrow 512:4:x+20=72-36 \Leftrightarrow 128:x+20=36$.

c) $512:(4\times x)+24=8\times 9-32\ /\times 4 \Rightarrow 512:(4\times x)\times 4+24\times 4=8\times 9\times 4-32\times 4 \Leftrightarrow 128:x:4+96=288-128 \Leftrightarrow 512:x+96=160$.

d) $512:(4\times x)+24=8\times 9-32\ /:4 \Rightarrow 512:(4\times x):4+24:4=8\times 9:4-32:4 \Leftrightarrow 512:4:x:4+6=2\times 9-8 \Leftrightarrow 512:16:x+6=18-8 \Leftrightarrow 32:x+6=10$.

223. Pentru exercițiul nr. **202**: $32y=32y$; $y\in N$; pentru exercițiul nr. **211**: $116a=116a$; $a\in N$; pentru exercițiul nr. **212**: $40x=40x$; $x\in N$; pentru exercițiul nr. **213**: $1\,064y=1\,064y$; $y\in N$; pentru exercițiul nr. **214**: $420+160y=420+160y$; $y\in N$; pentru exercițiul nr. **215**: $90y+36=80y+116\ /-80y \Leftrightarrow 10y+36=116\ /-36 \Leftrightarrow 10y=80 \Rightarrow y=80:10 \Leftrightarrow y=8$; pentru exercițiul nr. **216**: $720y:8+64=140y-36 \Leftrightarrow 90y+64=140y-36\ /-90y \Leftrightarrow 64=50y-36\ /+36 \Leftrightarrow 100=50y \Leftrightarrow y=100:50 \Leftrightarrow y=2$; pentru exercițiul nr. **217**: $48b-4=18b+56\ /+4 \Leftrightarrow 48b=18b+60\ /-18b \Leftrightarrow 30b=60 \Rightarrow b=60:30 \Leftrightarrow b=2$; pentru exercițiul nr. **218**: $36b-24=72b-384\ /+24 \Leftrightarrow 36b=72b-360\ /-36b \Leftrightarrow 0=36b-360 \Rightarrow 36b=360+0 \Leftrightarrow 36b=360 \Leftrightarrow b=360:36 \Leftrightarrow b=10$; pentru exercițiul nr. **219**: $8x-28=4x+4\ /+28 \Leftrightarrow 8x=4x+32\ /-4x \Leftrightarrow 4x=32 \Leftrightarrow x=32:4 \Leftrightarrow x=8$; <u>Observatii</u>: Asemenea egalități (exerciții cu «x», numite în clasa a V-a propoziții cu o variabilă sau ecuații) se pot rezolva și pe baza relațiilor dintre termeni (factori) și rezultat, adică: $8x-28=4x+4$. Se observă că $8x$ are rol de descăzut, care este egal cu scăzătorul plus diferența: $8x=4x+4+28 \Leftrightarrow 8x=4x+32$. Termenul 32 este egal cu diferența dintre sumă și celălalt termen: $32=8x-4x \Leftrightarrow 32=4x$. Factorul x este egal cu cîtul dintre produsul 32 și primul factor: $4:x=32:4 \Leftrightarrow x=8$. (Folosim aceste relații încît să avem într-un membru al egalității numai necunoscuta). Pentru exercițiul nr. **220**: $32x:2+4=20x-60 \Leftrightarrow 16x+4=20x-60\ /-4 \Leftrightarrow 16x=20x-64\ /-16x \Leftrightarrow 0=4x-64 \Leftrightarrow$

$4x=64+0 \Leftrightarrow 4x=64 \Leftrightarrow x=64 : 4 \Leftrightarrow x=16$; sau: $16x+4=20x-60$; termenul $16x$ este egal cu suma, $20x-60$, minus termenul 4, adică: $16x=20x-60-4 \Leftrightarrow 16x=20x-64$. Scăzătorul 64 este egal cu descăzutul, $20x$, minus diferența $16x$, adică: $64=20x-16x \Leftrightarrow 64=4x$. Rezultă $x=64 : 4 \Leftrightarrow x=16$. Pentru exercițiul nr. 221:
$64x-140=112x : 2+4 \Leftrightarrow 64x-140=56x+4 \ /-56x \Leftrightarrow 8x-140=4 \ /-4 \Leftrightarrow 8x-144=0 \Leftrightarrow 8x=144+0 \Leftrightarrow 8x=144 \Leftrightarrow x=144 : 8 \Leftrightarrow x=18$; sau: $64x-140=112x : 2+4 \Leftrightarrow 64x-140=56x+4$. Produsul $64x$ are rol de descăzut. Deci: $64x=56x+4+140 \Leftrightarrow 64x=56x+144$. Numărul 144 este un termen al adunării; deci: $144=64x-56x \Leftrightarrow 144=8x \Leftrightarrow x=144 : 8 \Leftrightarrow x=18$. Pentru exercițiul nr. 222: $512 : (4\times x)+24=8\times 9-32 \Leftrightarrow 512 : (4\times x)+24=72-32 \Leftrightarrow 512 : (4\times x)+24=40 \ /-24 \Leftrightarrow 512 : (4\times x)=16 \Leftrightarrow 512 : 4 : x=16 \Leftrightarrow 128 : x=16 \Leftrightarrow x=128 : 16 \Leftrightarrow x=8$; sau: $512 : (4\times x)+24=8\times 9-32 \Leftrightarrow 512 : (4\times x)+24=72-32 \Leftrightarrow 512 : (4\times x)+24=40$. Termenul $512 : (4\times x)$ este egal cu diferența dintre suma 40 și termenul 24, adică: $512 : (4\times x)=40-24 \Leftrightarrow 512 : (4\times x)=16$. Produsul $4\times x$ are rol de împărțitor, deci: $4\times x=512 : 16 \Leftrightarrow 4\times x=4\times x=32 \Leftrightarrow x=32 : 4 \Leftrightarrow x=8$. Sau: deoarece avem x numai într-un membru al egalității, putem parcurge un drum invers, adică: $512 : (4\times x)+24=40$. Care este ultima operație cu rezultatul 40? Adunarea cu 24. Atunci: $?+24=40$. Rezultă deci: $512 : (4\times x)=40-24 \Leftrightarrow 512 : (4\times x)=16$. Ultima operație, cu rezultatul 16, este împărțirea la $4\times x$. Atunci: $512 : ?=16$ Rezultă : $4\times x=512 : 16 \Leftrightarrow 4\times x=32 \Leftrightarrow x=32 : 4 \Leftrightarrow x=8$.

224. 1) Prin <u>adunarea membru cu membru</u> a două egalități între numere naturale, obținem o altă egalitate între numere naturale, adică:

$\left.\begin{array}{l} a)\ 16+24=88-48 \\ b)\ 2\times 4=8 \end{array}\right\}$ $a+b \Rightarrow 16+24+2\times 4=88-48+8 \Leftrightarrow 40+2\times 4=40+8 \Leftrightarrow 48=48$

2) Prin <u>scăderea membru cu membru</u> a două egalități cu numere naturale, atunci cînd scăderile sînt posibile, obținem o altă egalitate între numere naturale, adică:

$\left.\begin{array}{l} a)\ 16+24=88-48 \\ b)\ 2\times 4=8 \end{array}\right\}$ $a-b \Rightarrow 16+24-2\times 4=88-48-8 \Leftrightarrow 40-8=40-8 \Leftrightarrow 32=32$.

3) Prin <u>înmulțirea membru cu membru</u> a două egalități cu numere naturale, obținem o altă egalitate între numere naturale, adică:

$\left.\begin{array}{l} a)\ 16+24=88-48 \\ b)\ 2\times 4=8 \end{array}\right\}$ $a\times b \Rightarrow (16+24)\times(2\times 4)=(88-48)\times 8 \Leftrightarrow$

$40\times 8=40\times 8 \Leftrightarrow 320=320$; sau:
$(16+24)\times 8=(88-48)\times 8 \Leftrightarrow 16\times 8+24\times 8=88\times 8-48\times 8 \Leftrightarrow 128+192=704-384 \Leftrightarrow 320=320$.

4) Prin împărțirea membru cu membru a două egalități cu numere naturale, atunci cînd împărțirile exacte sînt posibile, obținem o altă egalitate de numere naturale, adică:

a) $16+24=88-48$
b) $2\times4=8$ $\Big\}$ $a : b \Rightarrow (16+24) : (2\times4)=(88-48) : 8 \Leftrightarrow$

$40 : 8=40 : 8 \Leftrightarrow 5=5$; sau: $16 : 8+24 : 8=$
$=88 : 8-48 : 8 \Leftrightarrow 2+3=11-6 \Leftrightarrow 5=5$.

225. a) Scriem relațiile pe scurt, notînd cu a, b și c suma primului, a celui de-al doilea și, respectiv, a celui de-al treilea copil: $a+b+c=425$
$a+b=265$
$b+c=365$
Luăm în considerare primele două egalități și le scădem, membru cu membru, astfel:

I) $a+b+c=425$
II) $a+b=265$ | I – II $\Rightarrow$ $(a+b+c)-(a+b)=425-265 \Leftrightarrow$ $a+b+c-a-$
$-b=160 \Leftrightarrow c=160$. Dacă $b+c=365$, iar $c=160$, rezultă $b+160=365$, iar $b=365-\ -160 \Leftrightarrow$ $b=205$. Dacă $a+b=265$, iar $b=205$, rezultă $205+a=265$, iar $a=265-205 \Leftrightarrow a=60$.

Observatii: putem lua în considerare prima și ultima egalitate, determinîndu-l pe a, sau putem aduna ultimele două egalități, iar din egalitatea obținută scădem membru cu membru, prima egalitate, determinîndu-l pe b.

b) Notînd numărul de păsări de fiecare fel cu inițialele cuvintelor care le denumesc, putem scrie pe scurt:
$g+r=32$
$c+r=10$
$c+g=28$
Dacă adunăm cele trei egalități, membru cu membru, obținem dublul numărului de păsări din curtea bunicului, adică:
$g+g+c+c+r+r=32+10+28 \Leftrightarrow 2g+2c+2r=70 \Leftrightarrow 2\times(g+c+r)=70 \Rightarrow$
$g+c+r=70 : 2 \Leftrightarrow g+c+r=35$.
Luînd în considerare această egalitate și una dintre celelalte, putem determina o mărime. De exemplu:

I) $g+c+r=35$
II) $g+r=32$ | I – II $\Rightarrow$ $(g+c+r)-(g+r)=35-32 \Leftrightarrow$ $g+c+r-g-r=$
$=35-32 \Leftrightarrow c=3$. Sau:

I) $g+c+r=35$
II) $r+c=10$ | I – II $\Rightarrow$ $(g+c+r)-(r+c)=35-10 \Leftrightarrow$ $g+c+r-r-c=$
$=25 \Leftrightarrow g=25$. Sau:

I) $g+c+r=35$
II) $g+c=28$ | I – II $\Rightarrow r=35-28 \Rightarrow r=7$.

Observație: Pentru alte moduri de rezolvare, a se vedea problema II.7 din volumul I al acestei culegeri.

c) Pe scurt putem scrie:
8 băieți și 14 fete → 620 kg.
8 băieți și 4 fete → 320 kg.
Din compararea celor două relații rezultă că în prima zi au cules cu $620-320=300$ kg mai mult, deoarece au fost cu $14-4=10$ mai multe fete. Deci 10 fete au cules 300 kg de morcovi, iar o fată a cules 30 kg, adică $300:10=30$ (kg). Un băiat a cules 25 kg de morcovi, adică $(320-4\times30):8=200:8=25$ (kg). Dacă notăm cu x cantitatea recoltată de un băiat și cu y cantitatea recoltată de o fată, atunci cantitatea recoltată de 8 băieți este $8x$, iar cea recoltată de 14 fete, $14y$. Putem scrie:

I) $8x+14y=620$ |
II) $8x+4y=320$ |

$I-II \Rightarrow (8x+14y)-(8x+4y)=620-320 \Leftrightarrow 8x+14y-8x-4y=300 \Leftrightarrow 10y=300 \Leftrightarrow y=300:10 \Leftrightarrow y=30$.

Atunci $x=(320-4\times30):8 \Leftrightarrow x=200:8 \Leftrightarrow x=25$.

d) Notînd prețul unei truse cu t și al unui caiet cu c, putem scrie pe scurt:
I) $3t+2c=900$
II) $2t+3c=900+100$
Pentru a scădea egalitățile, membru cu membru, în vederea eliminării (reducerii) unei mărimi, înmulțim fiecare membru al primei egalități cu 2, iar a doua, cu 3 (poate fi și invers):

I) $3t+2c=200/\times2$ | $\Rightarrow$ $6t+4c=1\,800$
II) $2t+3c=1\,000/\times3$ | $6t+9c=3\,000$

Dacă scădem, membru cu membru, prima egalitate din a doua, obținem: $5c=1\,200 \Rightarrow c=1\,200:5 \Rightarrow c=240$. Atunci $t=c-100 \Leftrightarrow t=240-100 \Rightarrow t=140$. Observație: Pentru alt mod de lucru trebuie să se observe că un caiet costă mai mult decît o trusă cu 100 lei. Atunci 3 truse vor costa cu 300 lei mai puțin decît 3 caiete, adică: $3c+2c=900+300 \Leftrightarrow 5c=1\,200 \Rightarrow c=1\,200:5 \Leftrightarrow c=240$; $t=140$.

e) Scriem pe scurt enunțul:
3 g.b. și 4 g.s. → 3 436 kg.
6 g.b. și 8 g.s. → ? kg.
Se observă că fiecare mărime din prima relație este dublată în a doua relație. Se va dubla deci și cantitatea totală, adică:
3 g.b. și 4 g.s. → 3 436 kg. $/\times2$
6 g.b. și 8 g.s. → $3\,436\times2=6\,872$ (kg).

f) Se observă că în a doua situație, fiecare cantitate reprezintă $\frac{1}{2}$ din cantitățile exprimate în prima relație. Deci și prețul va fi $\frac{a}{2}$ lei.

I. G.

226. a) Dacă adunăm același număr natural la ambii membri ai unei inegalități între numere naturale, obținem o inegalitate de același sens între numere naturale. Deci: $9<12\ /+3 \Rightarrow 9+3<12+3 \Leftrightarrow 12<15$.

b) Dacă scădem același număr natural din ambii membri ai unei inegalități între numere naturale, atunci cînd scăderile sînt posibile, obținem o inegalitate de același sens între numere naturale. Deci: $9<12\ /-3 \Rightarrow 9-3<12-3 \Leftrightarrow 6<9$.

c) Dacă înmulțim cu același număr natural, diferit de zero, ambii membri ai unei inegalități stricte (în care este numai < sau >) între numere naturale, obținem o inegalitate de același sens[1] între numere naturale. Deci: $9<12\times3 \Rightarrow 9\times3<12\times3 \Leftrightarrow 27<36$.

d) Dacă împărțim la același număr natural ambii membri ai unei inegalități între numere naturale, atunci cînd împărțirile exacte se pot efectua, obținem o inegalitate de același sens între numere naturale. Deci: $9<12\ /:3 \Rightarrow 9:3<12:3 \Leftrightarrow 3<4$.

227. a) $36>18\ /+3 \Rightarrow 36+3>18+3 \Leftrightarrow 39>21$.
b) $36>18\ /-3 \Rightarrow 36-3>18-3 \Leftrightarrow 33>15$.
c) $36>18\ /\times3 \Rightarrow 36\times3>18\times3 \Leftrightarrow 108>54$.
d) $36>18\ /:3 \Rightarrow 36:3>18:3 \Leftrightarrow 12>6$.

228. a) $24\leq33\ /+3 \Rightarrow 24+3\leq33+3 \Leftrightarrow 27\leq36$.
b) $24\leq33\ /-3 \Rightarrow 24-3\leq33-3 \Leftrightarrow 21\leq30$.
c) $24\leq33\ /\times3 \Rightarrow 24-3\leq33\times3 \Leftrightarrow 72\leq99$.
(Fiind o inegalitate nestrictă, nu mai este necesară condiția ca numărul cu care înmulțim să fie diferit de zero).
d) $24\leq33\ /:3 \Rightarrow 24-3\leq33:3 \Leftrightarrow 8\leq11$.

229. a) $84\geq54\ /+3 \Rightarrow 84+3\geq54+3 \Leftrightarrow 87\geq57$.
b) $84\geq54\ /-3 \Rightarrow 84+3\geq54-3 \Leftrightarrow 81\geq51$.
c) $84\geq54\ /\times3 \Rightarrow 84+3\geq54\times3 \Leftrightarrow 252\geq162$.
d) $84\geq54\ /:3 \Rightarrow 84+3\geq54:3 \Leftrightarrow 28\geq18$.

230. a) $6a+18<75\ /+3 \Rightarrow 6a+18+3<75+3 \Leftrightarrow 6a+21<78$.
b) $6a+18<75\ /-3 \Rightarrow 6a+18+3<75-3 \Leftrightarrow 6a+15<72$.
c) $6a+18<75\ /\times3 \Rightarrow (6a+18)\times3<75\times3 \Leftrightarrow 18a+54<225$.
d) $6a+18<75\ /:3 \Rightarrow (6a+18):3<75:3 \Leftrightarrow 2a+6<25$.

231. a) $180-6a>9a+150\ /+3 \Rightarrow 180-6a+3>9a+150+3 \Leftrightarrow 183-6a>9a+153$.
b) $180-6a>9a+150\ /-3 \Rightarrow 180-6a-3>9a+150-3 \Leftrightarrow 177-6a>9a+1$.
c) $180-6a>9a+150\ /\times3 \Rightarrow (180-6a)\times3>(9a+150)\times3 \Leftrightarrow 540-18a>27a+450$.
d) $180-6a>9a+150\ /:3 \Rightarrow (180-6a):3>(9a+150):3 \Leftrightarrow 60-2a>3a+50$.

---

1 De același sens înseamnă că semnul existent (>, <, ≥, ≤)la inegalitatea dată este același și la inegalitatea ce se obține.

232. a) $3a+9\leq 6a+3$ $/+3 \Rightarrow 3a+12\leq 6a+6$.
b) $3a+9\leq 6a+3$ $/-3 \Rightarrow 3a+6\leq 6a$.
c) $3a+9\leq 6a+3$ $/\times 3 \Rightarrow 9a+27\leq 18a+9$.
d) $3a+9\leq 6a+3$ $/ : 3 \Rightarrow a+3\leq 2a+1$.

233. a) $6a+48\geq 18a-12$ $/+3 \Rightarrow 6a+51\geq 18a-9$.
b) $6a+48\geq 18a-12$ $/-3 \Rightarrow 6a+45\geq 18a-15$.
c) $6a+48\geq 18a-12$ $/\times 3 \Rightarrow 18a+144\geq 54a-36$.
d) $6a+48\geq 18a-12$ $/ : 3 \Rightarrow 2a+16\geq 6a-4$.

234. a) $111>27a+3$ $/+3 \Rightarrow 111+3>27a+3+3 \Leftrightarrow 114>27a+6$.
b) $111>27a+3$ $/-3 \Rightarrow 108>27a$.
c) $111>27a+3$ $/\times 3 \Rightarrow 333>81a+9$.
d) $111>27a+3$ $/ : 3 \Rightarrow 37>9a+1$.

235. Pentru exercițiul nr. 230: $6a+18<75$ $/ : 3 \Rightarrow 2a+6<25$ $/-6 \Leftrightarrow 2a<25-6 \Leftrightarrow 2a<19 \Rightarrow a<19 : 2 \Rightarrow a\in\{0,1,2,\dots, 8,9\}$. Pentru exercițiul nr. 231: $180-6a>9a+150$ $/+6a \Rightarrow 180>15a+150$ $/-150 \Leftrightarrow 30>15a \Rightarrow a<30 : 15 \Leftrightarrow a<2$ sau: $180-6a>9a+150$ $/ : 3 \Leftrightarrow 60-2a>3a+50$ $/+2a \Leftrightarrow 60>5a+50$ $/-50 \Leftrightarrow 10>5a \Leftrightarrow a<10 : 5 \Rightarrow a<2$. Pentru exercițiul nr. 232: $3a+9\leq 6a+3$ $/ : 3 \Leftrightarrow a+3\leq 2a+1$ $/-a \Leftrightarrow 3\leq a+1$ $/-1 \Leftrightarrow 2\leq a \Rightarrow a\in\{2,3,\dots,n\}$. Pentru exercițiul nr. 233: $6a+48\geq 18a-12$ $/ : 6 \Leftrightarrow a+8\geq 3a-2$ $/-a \Leftrightarrow 8\geq 2a-2$ $/+2 \Leftrightarrow 6\geq 2a \Rightarrow 2a\leq 10 \Rightarrow a\leq 5 \Rightarrow a\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Pentru exercițiul 234: $111>27a+3$ $/ : 3 \Leftrightarrow 37>9a+1$ $/-1 \Leftrightarrow 36>9a \Leftrightarrow 36>9a$ $/ : 9 \Leftrightarrow 4>a \Leftrightarrow a<4 \Rightarrow a\in\{0,1,2,3\}$.

236. a) Numărul căutat este de forma $\overline{ab}$. Atunci $\overline{ab}+4<19$ $/-4 \Leftrightarrow \overline{ab}<15 \Rightarrow \overline{ab}\in\{10,11,12,13,14\}$. Pentru clasele a II-a – a IV-a, se mai poate gîndi și astfel: Care sînt numerele mai mici decît 19, dar mai mari decît 9? Rezultatele pot fi: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18. Dacă $\overline{ab}+4=10 \Rightarrow \overline{ab}=6$(F); dacă $\overline{ab}+4=11 \Rightarrow \overline{ab}=7$(F); dacă $\overline{ab}+4=12 \Rightarrow \overline{ab}=8$(F); dacă $\overline{ab}+4=13 \Rightarrow \overline{ab}=9$(F); dacă $\overline{ab}+4=14 \Rightarrow \overline{ab}=10$(A); dacă $\overline{ab}+4=15 \Rightarrow \overline{ab}=11$(A); dacă $\overline{ab}+4=16 \Rightarrow \overline{ab}=12$(A); dacă $\overline{ab}+4=17 \Rightarrow \overline{ab}=13$(A); dacă $\overline{ab}+4=18 \Rightarrow \overline{ab}=14$(A). Se poate observa de la început că $\overline{ab}\geq 10$, dar mai mic decît 15, adică $10\leq \overline{ab}<15$. Sau: dacă $\overline{ab}+4=19$, atunci $\overline{ab}=19-4 \Leftrightarrow \overline{ab}=15$; dar $\overline{ab}+4<19$, atunci $\overline{ab}<15$, deci $\overline{ab}\in\{10,11,12,13,14\}$.

b) Notăm numărul căutat cu y.
Din enunț rezultă: $63-y>57$ $/-57 \Rightarrow 6-y>0 \Leftrightarrow 6>y \Rightarrow y\in\{5,4,3,2,1,0\}$ sau: $(63-y)\in\{58,59,60,61,62,63\}$, căci diferența poate fi cel mult egală cu descăzutul. Dacă $63-y=58 \Rightarrow y=5$; dacă $63-y=59 \Rightarrow y=4$; dacă $63-y=60 \Rightarrow y=3$; dacă $63-y=61 \Rightarrow y=2$; dacă $63-y=62 \Rightarrow y=1$; dacă $63-y=63 \Rightarrow y=0$. Sau: dacă $63-y=57$, $y=63-57 \Leftrightarrow y=6$; dar

$63-y>57$, deci $y<6$, deoarece y este scăzătorul. Rezultă $y\in\{5,4,3,2,1,0\}$.

c) Notăm numărul căutat cu x. Atunci $x-13\leq 18$. Se observă că x are rol de descăzut, deci trebuie impusă condiția $x\geq 13$. Din $x-13\leq 18$ $/+13$, rezultă $x\leq 31$. Deci $x\in\{13,14,..., 30,31\}$. Sau: dacă $x-13=18$, rezultă $x=13+18 \Leftrightarrow x=31$; dar $x-13\leq 18$, deci $x\leq 31$. Din $x\geq 13$ și $x\leq 31$ rezultă $13\leq x\leq 31$, deci $x\leq\{13,14,..., 30,31\}$.

d) Notăm numărul căutat cu x. Atunci $17<20-x\leq 20 \Leftrightarrow$ $17<20-x\leq 20$ $/-17 \Leftrightarrow 0<3-x\leq 3$. Rezultă $(3-x)\in\{0,1,2,3\}$. Dacă $3-x=0$, atunci $x=3$; dacă $3-x=1 \Rightarrow x=2$; dacă $3-x=2 \Rightarrow x=1$; dacă $3-x=3 \Rightarrow x=0$. Sau: luăm mai întîi în considerare prima parte a dublei inegalități, adică: $17<20-x \Rightarrow 20-x>17$ Dacă $20-x=17 \Rightarrow x=20-17 \Leftrightarrow$ $x=3$. Dar $20-x>17$, deci, pentru ca diferența să fie mai mare, trebuie ca scăzătorul să fie mai mic decît 3. Deci $x<3$; luăm, apoi, în considerare partea a doua a dublei inegalități, adică: $20-x\leq 20$. Dacă $20-x=20 \Rightarrow$ $x=20-20 \Leftrightarrow x=0$; dar $20-x\leq 20$; pentru ca diferența să fie mai mică decît 20, trebuie ca x să fie cel puțin egal cu 0, adică $x\geq 0$. Din $x<3$ și $x\geq 0$ rezultă: $x\in\{0,1,2\}$.

e) Notăm numărul căutat cu a. Atunci: $6\leq a-12\leq 15$. $6\leq a-12\leq 15$ $/-6 \Leftrightarrow$ $0\leq a-18\leq 9 \Rightarrow$ $(a-18)\in\{0,1,2,..., 9\}$. Dacă $a-18=0$, rezultă $a=18+0 \Leftrightarrow a=18$; dacă $a-18=1 \Rightarrow a=19$; dacă $a-18=2 \Rightarrow a=20$; dacă $a-18=3 \Rightarrow a=21$ etc.; dacă $a-18=9 \Rightarrow a=27$. Deci $a\in\{18,19,20,... 26,27\}$. Sau: prima parte a inegalității este $6\leq a-12$. Dacă $a-12=6 \Rightarrow a=12+6 \Leftrightarrow a=18$. Dar $a-12\geq 6$, deci $a\geq 18$. A doua parte a inegalității este: $a-12\leq 15$. Dacă $a-12=15 \Rightarrow a=12+15 \Leftrightarrow$ $a=27$. Dar $a-12\leq 15$, deci $6\leq 27$. Din $a\geq 18$ și $a\leq 27$ rezultă $a\in\{18,19,..., 26,27\}$. Pe scurt: $6\leq a-12 \Rightarrow a\geq 12+6 \Leftrightarrow a\geq 18$; $a-12\leq 15 \Rightarrow a\leq 12=15 \Leftrightarrow a\leq 27$. Deci $a\in\{18,19,20,..., 26,27\}$.

f) Notăm numărul căutat cu x. Atunci: $30\leq x+30\leq 32$ $/-30 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 2 \Rightarrow$ $x\in\{0,1,2\}$; sau: $30\leq x+30$; dacă $x+30=30 \Rightarrow x=0$; dar $x+30\geq 30$, atunci $x\geq 0$; $x+30\leq 32$; dacă $x+30=32 \Rightarrow x=32-30 \Leftrightarrow x=2$; dar $x+30\leq 32$, deci $x\leq 2$. Din $x\geq 0$ și $x\leq 2$ rezultă $x\in\{0,1,2\}$. Pe scurt: $30\leq 30+x\leq 32$. Din $30\leq 30+x \Rightarrow x\geq 30-30 \Leftrightarrow x\geq 0$. Din $x+30\leq 32 \Rightarrow$ $x\leq 32-30 \Leftrightarrow x\leq 2$. Din $x\geq 0$ și $x\leq 2 \Rightarrow x\in\{0,1,2\}$.

g) Notăm numărul căutat cu y. Atunci: $11\leq 121-y<121$ $/-11 \Rightarrow$ $0\leq 110-y<110 \Rightarrow$ $(110-y)\in\{0,1,2,3,..., 109\}$. Dacă y are rol de scăzător, rezultă: $y\in\{110,109,108,..., 3,2,1\}$. Sau: din $11=121-y \Rightarrow$ $y=121-11 \Leftrightarrow y=110$. Pentru ca diferența să fie cel puțin 11, trebuie ca scăzătorul să fie cel mult 110, deci $y\leq 110$. Din $121-y=121 \Rightarrow$ $y=121-121 \Leftrightarrow y=0$. Pentru ca $121-y<121$, trebuie ca y, care are rol de scăzător să fie mai mare decît 0, adică $y>0$. Din $y\leq 110$ și $y>0 \Rightarrow$ $y\in\{1,2,3,..., 108,109,110\}$. Pe scurt: din $11\leq 121-y \Rightarrow y\leq 121-11 \Leftrightarrow$

$y \leq 110$. Din $121 - y < 121 \Rightarrow 121 - 121 \Leftrightarrow y > 0$. Din $y > 0$ și $y \leq 110 \Rightarrow y \in \{1,2,3,..., 110\}$.

h) Notăm numărul căutat cu y. Atunci: $8 \leq 8y \leq 72$ / : $8 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 9 \Rightarrow y \in \{1,2,3,..., 8,9\}$. Sau: dacă $8 = 8y \Rightarrow y = 1$; dar $8 \leq 8y$, rezultă $1 \leq y \Leftrightarrow y \geq 1$. Dacă $8y = 72 \Rightarrow y = 72 : 8 \Leftrightarrow y = 9$; dar $8y \leq 72 \Rightarrow y \leq 9$. Din $y \geq 1$ și $y \leq 9$, rezultă: $y \in \{1,2,3,..., 8,9\}$. Pe scurt: Din $8 \leq 8y \Rightarrow y \geq 8 : 8 \Leftrightarrow y \geq 1$. Din $8y \leq 72 \Rightarrow y \leq 72 : 8 \Leftrightarrow y \leq 9$. Din $y \geq 1$ și $y \leq 9$, rezultă $y \in \{1,2,3,..., 8,9\}$.

i) Notăm numărul căutat cu a. Atunci: $3 \leq a : 9 \leq 7 \Rightarrow (a : 9) \in \{3,4,5,6,7\}$. Dacă $a : 9 = 3 \Rightarrow a = 3 \times 9 \Leftrightarrow a = 27$; dacă $a : 9 = 4 \Rightarrow a = 36$; dacă $a : 9 = 5 \Rightarrow a = 45$; dacă $a : 9 = 6 \Rightarrow a = 54$; dacă $a : 9 = 7 \Rightarrow a = 63$. Deci $a \in \{27,36,45,54,63\}$. Sau: dacă $a : 9 = 3 \Rightarrow a = 27$, dar $a : 9 \geq 3$, deci $a \geq 27$; dacă $a : 9 = 7 \Rightarrow a = 63$; dar $a : 9 \leq 27$, deci $a \leq 63$. Din $a \geq 27$ și $a \leq 63$, rezultă $a \in \{27,36,45,54,63\}$ deci $a = M_9 \geq 27$ și $a = M_9 \leq 63$. Pe scurt: Din $3 \leq a : 9 \Rightarrow a = M_9 \geq 27$; din $a : 9 \leq 7 \Rightarrow a = M_9 \leq 63$; rezultă $a \in \{27,36,45,54,63\}$.

j) Notăm numărul căutat cu a. Atunci: $1 < 24 : a \leq 12 \Rightarrow (24 : a) \in \{2,3,4,6,8,12\}$, adică $(24 : a)$ este un număr ce divide pe 24 (divizor propriu). Dacă $24 : a = 2 \Rightarrow a = 12$; dacă $24 : a = 3 \Rightarrow a = 8$; dacă $24 : a \Rightarrow a = 6$; dacă $24 : a = 6 \Rightarrow a = 4$; dacă $24 : a = 8 \Rightarrow a = 3$; dacă $24 : a = 12 \Rightarrow a = 2$. Deci nu este soluție unică. Sau: dacă $24 : a = 1 \Rightarrow a = 24$; dar $24 : a > 1$, deci a trebuie să fie un divizor al lui 24 mai mic decît 24, adică $a < 24$. Dacă $24 : a = 12 \Rightarrow a = 24 : 12 \Leftrightarrow a = 2$; dar $24 : a \leq 12$; a fiind împărțitorul, pentru a obține un cît mai mic decît 12, trebuie să fie mai mare decît 2, deci $a \geq 2$. Din $a < 24$ și $a \geq 2$ și a divizor al lui 24, rezultă $a \in \{2,3,4,6,8,12\}$.

I. H.

237. Știind că adunarea numerelor naturale este o operație asociativă și comutativă, putem scrie: $(60 + b) + a = 60 + (a + b) = 60 + 32 = 92$.

238. Deoarece $(2 + a) + b = 2 + (a + b) \Rightarrow (2 + a) + b = 2 + 3 = 5$.

239. Deoarece $18 + (a + 5) = (18 + a) + 5 \Rightarrow 18 + (a + 5) = 20 + 5 = 25$.

240. Deoarece $(200 + 100) + x = 200 + (x + 100) \Rightarrow$
$(200 + 100) + x = 200 + 200 = 400$.

241. Deoarece $20 + (x + 19) = (20 + x) + 19 \Rightarrow 20 + (x + 19) = 35 + 19 = 54$.

242. Deoarece înmulțirea de numere naturale este o operație asociativă, rezultă:
$(4 \times a) \times b = 4 \times (a \times b) = 4 \times 200 = 800$.

243. Deoarece înmulțirea este o operație asociativă și comutativă, putem scrie:
$(8 \times 7) \times a = 8 \times (a \times 7) = 8 \times 91 = 728$.

244. Deoarece $9 \times (7 \times a) = (9 \times a) \times 7$, rezultă: $9 \times (7 \times a) = 630 \times 7 = 4\ 410$.

245. Deoarece $a \times (5 \times 2 \times 10) = (a \times 10) \times (5 \times 2)$, rezultă:
$a \times (5 \times 2 \times 10) = 130 \times 10 = 1\ 300$.

246. Înmulțirea este distributivă față de adunare. Deci:

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c = 96 + 120 = 216.$

247. Deoarece $z \times (u+y) = z \times u + z \times y \Rightarrow 98 + 140 = 238.$

248. Înmulțirea este distributivă și față de scădere. Deci:
$a \times (b-c) = a \times b - a \times c = 288 - 120 = 168.$

249. Deoarece $m \times (n-p) = mn - mp \Rightarrow m \times (n-p) = 128 - 48 = 80.$

250. Avem de calculat suma a două produse care au ca factor comun pe x. Scoatem în factor comun și obținem: $xy + xz = x(y+z) = 8 \times 23 = 184$. (Altfel spus: care era exercițiul ce a devenit $xy + xz$? Evident, $x(y+z) = xy + xz$, căci înmulțirea este distributivă față de adunare).

251. Deoarece $a \times b + a \times c = a \times (b+c)$, rezultă $a \times b + a \times c = 18 \times 19 = 342.$

252. Avem de calculat o diferență de produse care au ca factor comun pe x. Scoatem în factor comun și obținem: $x \times y - x \times z = x \times (y-z) = 14 \times 3 = 42$. (Se observă că scrierea $xy - xz$ a fost obținută prin aplicarea distributivității înmulțirii față de scădere, adică: $x \times (y-z) = x \times y - x \times z$).

253. Deoarece $a \times b - a \times c = a \times (b-c)$, rezultă: $a \times b - a \times c = 80 \times 5 = 400.$

254. Deoarece $x \times y + x \times z = x \times (y+z)$, rezultă: $2x \times (y+z) = 2 \times 476 = 952.$

255. Deoarece $ab + ac = a(b+c) = (b+c) \cdot a$, rezultă: $(b+c) \cdot 3a = 285 \cdot 3 = 855.$

256. Deoarece $xy - xz = x(y-z)$, rezultă $5x(y-z) = 5 \cdot 26 = 130.$

257. Deoarece $ab - ac = a(b-c) = (b-c) \times a$, rezultă: $(b-c) \times a : 8 = 64 : 8 = 8.$

258. Deoarece $a(b+c) = ab + ac$, iar $a(b-c) = ab - ac$, rezultă: $a(b+c) : 4 = (608 + 416) : 4 = 1\,024 : 4 = 256$, iar $a(b-c) : 6 = (608 - 416) : 6 = 192 : 6 = 32.$

259. Deoarece $ac - ab = a(c-b)$, iar b și c sînt numere consecutive pare, deci $c - b = 2$; rezultă $ac - ab = a \cdot 2 = 32$, iar $a = 32 : 2 \Leftrightarrow a = 16$; $b = 16 + 2 \Leftrightarrow b = 18$; $c = 18 + 2 \Leftrightarrow c = 20.$

260. Deoarece $ab + ac = a(b+c)$, rezultă: $21 \cdot (b+c) = 252$, iar $b + c = 252 : 21 = 12$. Deoarece $b + c = 12$, iar $b = 2c$, rezultă $2c + c = 12 \Leftrightarrow 3c = 12 \Rightarrow c = 4$, iar $b = 8$.

261. Orice număr natural diferit de 1, care se împarte doar la 1 și la el însuși (are numai doi divizori) se numește număr prim. În general, orice număr prim este impar, cu excepția lui 2, care este număr prim, dar par. Rezultă $x = 2$.
a) deoarece $xy + xz = x(y+z)$, rezultă $2(y+z) = 168$, iar $y + z = 168 : 2 \Leftrightarrow y + z = 84$. Atunci $x + y + z = 2 + 84 = 86.$
b) $x + 2y + 2z = x + 2(y+z) = 2 + 2 \cdot 84 = 2 + 168 = 170.$
c) $4x + 4y + 4z = 4 \times 2 + 4 \times (y+z) = 4 \times 2 + 4 \cdot 84 = 8 + 336 = 344.$
d) $10x + y + z = 10 \times 2 + 84 = 20 + 84 = 104.$
e) $x(y+z) \times 7 = (xy + xz) \cdot 7 = 168 \times 7 = 1\ 176.$
f) Deoarece $y + z = 84$, iar $x = 2$, rezultă: $(y+z) : x = 84 : 2 = 42.$

262. a) Deoarece $ab + ac = a(b+c)$, rezultă:
$(ab + ac) : (b+c) : a = a(b+c) : (b+c) : a = a : a = 1.$
b) Deoarece $ab - ac = a(b-c)$, rezultă:
$(ab - ac) : (b-c) : a = a(b-c) : (b-c) : a = a : a = 1.$

c) Scriind sistematic numerele date avem:
$[(1\ 000a+100b+10c+d)+(100a+10b+c)-(100b+10c+d)-$
$-(10b+c)]:(10a+a)=(1\ 000a+100b+10c+d+100a+10b+c-$
$-100b-10c-d-10b-c):11a=1\ 100a:11a=100.$

Sau: $[\overline{abc0}+d+\overline{abc}-(\overline{bc0}+d)-\overline{bc}]:11a=$

$(10\overline{abc}+\overline{abc}+d-10\overline{bc}-\overline{bc}-d):11a=$

$(11\overline{abc}-11\overline{bc}):11a=11(\overline{abc}-\overline{bc}):11a=(\overline{abc}-\overline{bc}):a=(100a+$

$+\overline{bc}-\overline{bc})=100a:a=100.$

Sau: $(1\ 000a+\overline{bcd}-\overline{bcd}+100a+\overline{bc}-\overline{bc}):11a=1\ 100a:11a=100.$

d) $[(1\ 000a+100b+10c+d)-(100b+10c+d)]:10a-[(100b+10c+d)-$
$-(10c+d)]:b=(1\ 000a+100b+10c+d-100b-10c-d):10a-$
$-(100b+10c+d-10c-d):b=1\ 000a:10a-100b:b=100-100=0.$

Sau: $(1\ 000a+\overline{bcd}-\overline{bcd}):10a-(100b+\overline{cd}-\overline{cd}:b=1\ 000a:10a-$
$-100b:b=\ 100-100=0.$

Am folosit și aici scrierea sistematică.

Observații metodice:

În clasele a III-a și a IV-a, elevii învață să scrie numerele naturale ca sumă „în care fiecare termen conține unități de un singur ordin" (exercițiile **1** și **2**, pag.**105**, manualul pentru clasa a III-a); la formarea numerelor (pag.**98** din manual) învață cheia sistemului de numerație zecimal (10 unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior), iar în clasa a IV-a (la exercițiile **38** și **39**, pag.**166**) întîlnesc exerciții de forma $\overline{ab}+\overline{ba}=44$ sau $n=\overline{xyut}$. Asemenea priceperi și deprinderi ar putea fi consolidate cu enunțuri de felul celor ce urmează:

1) Scrieți cîte zeci și cîte unități au (scrieți sistematic) numerele: **68**; **94**;
Răspuns: $68=6\times10+8=10\times6+8;\ 94=9\times10+4=10\times9+4.$
În general:

a) $\overline{ab}=a\times10+b=10a+b;$

b) $\overline{a0}=10a;$

c) $\overline{aa}=10a+a=11a.$

2) Scrieți sistematic (din cîte sute, cîte zeci și cîte unități sînt formate) numerele: **134** și **908**.
Răspuns: $134=1\times100+3\times10+4=100\times1+10\times3+4;$
$908=9\times100+0\times10+8=100\times9+8.$
În general:

a) $\overline{abc}=a\times100+b\times10+c=100a+10b+c;$

b) $\overline{aa0}=100a+10a+0=110a.$

c) $\overline{a00}=100a+0\times10+0=100a.$

3) Scrieți sistematic (din cîte mii, cîte sute, cîte zeci și cîte unități sînt formate) numerele: 1 306; 9 860.
Răspuns: $1\ 306 = 1\ 000 \times 1 + 100 \times 3 + 10 \times 0 + 6$;
$9\ 860 = 1\ 000 \times 9 + 100 \times 8 + 10 \times 6 + 0$.
În general:

a) $\overline{abcd} = 1\ 000a + 100b + 10c + d$;

b) $\overline{abab} = 1\ 000a + 100b + 10a + b = 1\ 010a + 101b = 101(10a + b)$ sau:
$\overline{abab} = \overline{ab00} + \overline{ab} = 100\,\overline{ab} + \overline{ab} = 101\,\overline{ab}$.

c) $\overline{abc\,abc} = \overline{abc\,000} + \overline{abc} = 1\ 000\,\overline{abc} + \overline{abc} = 1\ 001\,\overline{abc}$ etc.

4) Scrieți cîte sute sînt în numerele: 2 384; 9 865.
Răspuns: Deoarece $2\ 384 = 2\ 300 + 84 = 23 \times 100 + 84$, rezultă că sînt 23 de sute întregi (și 84 de unități); Deoarece $9\ 865 = 9\ 800 + 65 = 98 \times 100 + 65$, rezultă că sînt 98 de sute întregi (și 65 de unități).

5) Scrieți cîte zeci sînt în numerele: 68 504; 136 812.
Răspuns: $68\ 504 = 68\ 500 + 4 = 6\ 850 \times 10 + 4$, deci sînt 6 850 de zeci (și 4 unități);
$136\ 812 = 136\ 810 + 2 = 13\ 681 \times 10 + 2$, deci sînt 13 681 de zeci întregi (și 2 unități).
În general:

a) în numărul $\overline{abc}$ sînt $\overline{ab}$ zeci, căci $\overline{abc} = \overline{ab} \times 10 + c$;

b) în numărul $\overline{abcde}$ sînt $\overline{abc}$ sute, căci $\overline{abcde} = \overline{abc} \times 100 + \overline{de}$.

263. a) $5 \times 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8$ sau $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$;

b) $6b = b + b + b + b + b + b$ sau $\underbrace{6 + 6 + 6 + \ldots + 6}_{\text{de } b \text{ ori}}$;

c) $ab = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{\text{de } a \text{ ori}}$ sau $\underbrace{a + a + a \ldots + a}_{\text{de } b \text{ ori}}$.

264. a) 4×7 □ $6 \times 4 \Leftrightarrow 4 \times 7$ $\boxed{>}$ 4×6 sau 7×4 $\boxed{>}$ 6×4

b) $8 + 8 + 8 + 8 + 8$ □ $4 \times 8 \Leftrightarrow 5 \times 8$ $\boxed{>}$ 4×8 sau 8×5 $\boxed{>}$ 8×4;

c) $2a$ $\boxed{\leq}$ $3a$. Dacă $a = 0$, $2a = 3a$. Dacă $a \neq 0$, $2a < 3a$.

265. a) Reformulare parțială: Aflați două numere naturale $(x + 3)$ și $(y - 2)$ care înmulțite între ele dau produsul 12. Avem vreo informație care să ne coordoneze căutările? Da. $3 \leq 3 + x \leq 12$, căci $y - 2 \neq 0$. (Dacă $y - 2 = 0$, atunci produsul este 0, ceea ce nu convine). Rezultă: $(x + 3) \in \{6,4,3,12\}$, adică:
$(x + 3)(y - 2) = 12$;
$6 \times 2 = 12$;
$4 \times 3 = 12$;
$3 \times 4 = 12$;
$12 \times 1 = 12$.

Dacă $x+3=6$, rezultă $x=3$, iar $y-2=2$, deci $y=4$;
dacă $x+3=4$, rezultă $x=1$, iar $y-2=3$, deci $y=5$;
dacă $x+3=3$, rezultă $x=0$, iar $y-2=4$, deci $y=6$;
dacă $x+3=12$, rezultă $x=9$, iar $y-2=1$, deci $y=3$.
b) Deoarece $16=4\times4=8\times2=2\times8=16\times1=1\times16$, iar $(y+4)\geq4$, rezultă $(y+4)\in\{4,8,16\}$.
Dacă $y+4=4$, rezultă $y=0$, iar $x+1=4$, deci $x=3$.
dacă $y+4=8$, rezultă $y=4$, iar $x+1=2$, deci $x=1$;
dacă $y+4=16$, rezultă $y=12$, iar $x+1=1$, deci $x=0$.
c) Deoarece $y+7\geq7$, iar $14=2\times7=1\times14$, rezultă $(y+7)\in\{7,14\}$.
Dacă $y+7=7 \Rightarrow y=0$, iar $x-7=2$, deci $x=9$;
dacă $y+7=14$, rezultă $y=7$, iar $x-7=1$, deci $x=8$.
d) Din scrierea $(x-10)\in N$ rezultă $x\geq10$, iar din $(10-x)\in N$ rezultă $x\leq10$. Din $x\geq10$ și $x\leq10$ rezultă $x=10$, iar $y=0$, căci $(x-10)(10-x)=y \Leftrightarrow (10-10)(10-10)=0\times0=0$.

266. O soluție ar putea fi:

a) 9×8 ☐ $(8+4)\times6 \Leftrightarrow$

9×8 ☐ $8\times6+4\times6 \Leftrightarrow$

9×8 ☐ $8\times6+4\times2\times3 \Leftrightarrow$

9×8 ☐ $8\times6+8\times3 \Leftrightarrow$

9×8 ☐ $8(6+3) \Leftrightarrow$

9×8 [=] 8×9

b) 2×6 ☐ $3\times4 \Leftrightarrow$

2×6 ☐ $3\times(2+2) \Leftrightarrow$

2×6 ☐ $3\times2+3\times2 \Leftrightarrow$

2×6 ☐ $6+6 \Leftrightarrow$

2×6 [=] 2×6

267. Din scrierea $(a-8)\in N$ rezultă $a\geq8$; din scrierea $(8-a)\in N$ rezultă $a\leq8$. Din $a\geq8$ și $a\leq8$ rezultă $a=8$. Rezultă $(8-8)\cdot(8-8)\times8<(8-8)\times(8-8)+8$, căci $0\cdot0\cdot8<0\cdot0+8$, adică $0<8$.

268. a) $a\times a+a\times a=18 \Leftrightarrow 2\times a\times a=18 \Rightarrow a\times a=18:2 \Leftrightarrow a\times a=9 \Rightarrow a=3$;
b) $a\times a\times a+a\times a\times a=54 \Leftrightarrow 2\times a\times a\times a=54 \Rightarrow a\times a\times a=27 \Rightarrow a=3$;
c) $1\times2\times3\times a\times4=4\times3\times3\times2$, rezultă $a=3$, căci $1\times2\times3\times4=2\times3\times4$;
d) $1\times2\times3\times4\times8\times9=1\times a\times8\times8\times9$, rezultă $a=3$, deoarece $2\times4=8$, iar $1\times8\times9=1\times8\times9$;
e) $a\in N$, căci $1\times2\times3\times100=100\times2\times1\times3$;
f) deoarece $a\neq0$, iar $a:a=1$, rezultă: $1+a-1=100 \Rightarrow a=100$;
g) deoarece $a:b\times b=a$, căci $a>b\neq0$, rezultă $a-a+a+a=100 \Leftrightarrow 2a==100 \Rightarrow a=50$;

h) deoarece $a \neq 0$, iar $a : a : 2 = 1 : 2 = \frac{1}{2}$ și $a : a : 4 = \frac{1}{4}$, rezultă:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = a \Rightarrow 1 = a$;

i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a = 2 \Leftrightarrow 1 + a = 2 \Rightarrow a = 1$.

j) Rezolvarea 1

Deoarece $\overline{1a} = 10 + a$, rezultă $10 + a = 3a \Leftrightarrow 10 = 2a \Rightarrow a = 5$.

Rezolvarea 2

$\overline{1a} = M_3$ și $10 < M_3 < 20$. Deci $M_3 \in \{12, 15, 18\}$. Rezultă $a = 5$, căci $15 = 3 \times 5$.

k) Rezolvarea 1

$\overline{3a} = 30 + a$; $6a = 30 + a / - a \Rightarrow 5a = 30 \Rightarrow a = 6$.

Rezolvarea 2

$\overline{3a} = M_6$ și $30 \leq M_6 < 40$. Rezultă $M_6 \in \{30, 36\}$. Deci $36 = 6 \times 6$, iar $a = 6$.

l) Rezolvarea 1

$\overline{2a} = 20 + a$; $6a = 20 + a / - a \Rightarrow 5a = 20 \Rightarrow a = 4$.

Rezolvarea 2

$\overline{2a} = M_6$ și $20 < M_6 < 30$, deci $M_6 \in \{24\}$; rezultă $24 = 6 \times 4$, iar $a = 4$.

m) Rezolvarea 1

$\overline{1a} = 10 + a$; $10 + a = 6 \times a / - a \Rightarrow 10 = 5a \Leftrightarrow a = 2$, căci $12 = 6 \times 2$.

Rezolvarea 2

$\overline{1a} = M_6$, iar $M_6 < 20$ și $M_6 > 10$, deci $M_6 \in \{12, 18\}$; $\overline{1a} = 12$, căci $12 = 6 \times 2$, iar $a = 2$.

269. Rezolvarea 1

Număr nenul înseamnă număr diferit de 0. Fiind un exercițiu asemănător cu unul din manualul pentru clasa a IV-a, se poate rezolva astfel:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = \overline{...0}$;

$\overline{...0} \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = \overline{...0} \times 10 = \overline{...00}$;

$\overline{...00} \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 = \overline{...00} \times 14 \times 15 = \overline{...000}$;

$\overline{...000} \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20 = \overline{...000} \times 20 = \overline{...0000}$;

$\overline{...0000} \times 21 \times 22 \times 23 \times 24 \times 25 = \overline{...0000} \times 24 \times 25 = \overline{...0000} \times 6 \times 4 \times 25 = \overline{...0000} \times 100 = \overline{...000000}$.

Răspuns: 6 cifre zero.

Rezolvarea 2

Se știe că la înmulțirea oricărui număr natural terminat în zero (multiplu de 10) cu alt număr se obține un produs terminat în zero, adică: $a \times \overline{b0} = \overline{...0}$.

În șirul dat avem asemenea factori: 10 și 20. Ce alți factori au produsul terminat în zero? Orice multiplu de 5 înmulțit cu un număr par (cu soț) dă un produs multiplu de 10. Cîți multipli de 5 sînt în șirul dat? Multiplii de 5 sînt din 5 în 5, deci vor fi $25 : 5 = 5$ numere care se împart exact la 5 și care, înmulțite cu oricare dintre cele 12 numere pare vor da la produs cîte un zero (cuprinzînd și factorii 10 și 20). Ținînd cont de faptul că pînă la înmulțirea cu 25 obținem un produs terminat în 4 cifre de zero, deci un produs par mai mare decît 2, produsul final va avea 6 cifre de zero, căci la înmulțirea lui 25 cu un număr par mai mare decît 2 apar la terminația produsului încă 2 cifre de zero. Deci: în cîte cifre de zero se termină produsul dat? $5+1=6$ sau $4+2=6$ cifre zero, adică: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times$ $\times 24 \times 25 = \overline{\ldots 000000}$.

270. Fie a, b și, respectiv, c cele trei numere naturale. Din enunț rezultă: $ab=12$; $bc=28$; $a+c=10$. Deoarece $ab+bc=b(a+c)$, rezultă $12+28=b \times 10$, adică $b=4$; $a=3$; $c=7$.

271. a) Se numește număr par (cu soț) acel număr care se împarte exact la 2. Numerele pare formează șirul 0,2,4,6,8,10,..., căci $0 : 2 = 0 \Rightarrow 0 = 2 \times 0$; $2 : 2 = 1 \Rightarrow 2 = 2 \times 1$; $4 : 2 = 2 \Rightarrow 4 = 2 \times 2$; $6 : 2 = 3 \Rightarrow 6 = 2 \times 3$ etc. Atunci, în general: $a : 2 = n \Rightarrow a = 2n$.

b) Se numește număr impar (fără soț) acel număr care nu se împarte exact la 2. Care poate fi restul? Deoarece împărțitorul este 2, atunci restul trebuie să fie mai mic decît 2. Rezultă că restul este 1. Numerele impare formează șirul 1,3,5,7,9,..., căci $1 : 2 = 0$ (rest 1) $\Rightarrow 1 = 2 \times 0 + 1$;
$3 : 2 = 1$ (rest 1) $\Rightarrow 3 = 2 \times 1 + 1$;
$5 : 2 = 2$ (rest 1) $\Rightarrow 5 = 2 \times 2 + 1$;
$7 : 2 = 3$ (rest 1) $\Rightarrow 7 = 2 \times 3 + 1$;
$9 : 2 = 4$ (rest 1) $\Rightarrow 9 = 2 \times 4 + 1$; etc.
Atunci, în general, $a : 2 = n$ (rest 1) $\Rightarrow a = 2n+1$.

272. 1) Din enunț rezultă: $a : 3 = n$ (rest<3) $\Rightarrow r \in \{0,1,2\}$. Rezultă: $a=3n$; $a=3n+1$; $a=3n+2$.
2) $a : 4 = q$ (rest<4) $\Rightarrow r \in \{0,1,2,3\}$. Rezultă: $a=4q$; $a=4q+1$; $a=4q+2$; $a=4q+3$.
3) $a : 5 = k$ (rest<5) $\Rightarrow r \in \{0,1,2,3,4\}$. Rezultă: $a=5k$; $a=5k+1$; $a=5k+2$; $a=5k+3$; $a=5k+4$.

273. Dacă avem $2k+(2k+1)+(2k+2)=6k+3$, sumă impară, deci nu convine; dacă avem $(2k+1)+(2k+2)+(2k+3)=6k+6$, sumă pară. Deci numărul mai mare este număr impar.

274. Dacă avem $2k+(2k+1)+(2k+2)=6k+3$, sumă impară, deci numărul mai mic este număr par. Dacă avem $(2k+1)+(2k+2)+(2k+3)=6k+6$, o sumă pară, deci nu convine.

275. a) $a : (72 : 9) \Leftrightarrow a : 8$;
$a : 8 = 3 \Leftrightarrow a = 8 \times 3 \Rightarrow a = 24$;

b) $36 : a=6 \Leftrightarrow a=36 : 6 \Rightarrow a=6$;
c) $a\times2\times8=32 \Leftrightarrow a\times16=32 \Leftrightarrow a=32 : 16 \Rightarrow a=2$;
d) $a=8\times6+5 \Leftrightarrow a=48+5 \Rightarrow a=53$;
e) $r\neq0$ și $r<3$, rezultă $r\in\{1,2\}$. Dacă $r=1$, atunci $a=8\times3+1 \Rightarrow a=25$; dacă $r=2$, atunci $a=8\times3+2 \Rightarrow a=26$;
f) $r<1 \Rightarrow r=0$, iar $a=7\times9+0 \Rightarrow a=63$.
g) $6<r<9$, rezultă $r\in\{7,8\}$; dacă $r=7$, atunci $a=7\times9+7 \Rightarrow a=70$; dacă $r=8$, atunci $a=7\times9+8 \Rightarrow a=71$;
h) $(37-1) : a=9 \Leftrightarrow 36 : a=9 \Rightarrow a=36 : 9 \Rightarrow a=4$;
i) $r<6$ și $(26-r)$ se împarte exact la 3, adică $(26-r)$ ⋮ 3. Rezultă $r\in\{2,5\}$, iar $a=(26-2)$ ⋮ $3 \Leftrightarrow a=8$ și $a=(26-5) : 3 \Leftrightarrow a=21 : 3 \Leftrightarrow a=7$.
j) Deoarece $a=(19-r)$ ⋮ 2, iar 19 este număr impar, rezultă r număr impar (ca să obținem o diferență pară). Dacă $r=3$, atunci $a>3$, iar $a=(19-3) : 2 \Rightarrow a=8$; dacă $r=5$, atunci $a>5$, căci $a=(19-5) : 2 \Rightarrow a=7$; dacă $r=7$, atunci $a>7$, iar $a=(19-7) : 2 \Rightarrow a=6$ (fals); deci $a\in\{7,8\}$.
k) Deoarece cîtul este 1, rezultă $3<a\leq2$, deci $a\in\{4,5,6\}$. Sau: deoarece $a=(6-r) : 1$, iar $r<a$, rezultă: dacă $r=0$, $a=(6-0) : 1=6$; dacă $r=1$, $a=(6-1) : 1=5$; dacă $r=2$, $a=(6-2) : 1=4$; dacă $r=3$, $a=(6-3) : 1=3$ (fals).
l) Dacă $r=c$ și $r<4$, rezultă $c<4$, adică $c\in\{0,1,2,3\}$.
Dacă $c=0 \Rightarrow a=4\times0+0 \Rightarrow a=0$;
dacă $c=1 \Rightarrow a=4\times1+1 \Rightarrow a=5$;
dacă $c=2 \Rightarrow a=4\times2+2 \Rightarrow a=10$;
dacă $c=3 \Rightarrow a=4\times3+3 \Rightarrow a=15$; deci $a\in\{0,5,10,15\}$.
m) Din $r<3$ și $c=3r \Rightarrow (r,c)\in\{(1,3),(2,6)\}$. Dacă $r=1$ și $c=3 \Rightarrow a=3\times3+1 \Leftrightarrow a=10$; dacă $r=2$ și $c=6 \Rightarrow a=3\times6+2 \Leftrightarrow a=20$;
sau: dacă $c=3r$, rezultă $a=3\times3r+r \Leftrightarrow a=10r$; din $r<3$ și $c=3r$, rezultă $r\in\{1,2\}$. Dacă $r=1 \Rightarrow a=10\times1 \Leftrightarrow a=10$; dacă $r=2 \Rightarrow a=2\times10 \Leftrightarrow a=20$.
n) Din $r<10$ și $r=4c$ rezultă $4c<10 \Leftrightarrow c<2,5$, deci $c\in\{1,2\}$. Dacă $c=1$, atunci $a=10\times c+4c \Leftrightarrow a=10+4 \Leftrightarrow a=14$; dacă $c=2$, atunci $a=10\times c+$ $+4c \Leftrightarrow a=10\times2+4\times2 \Leftrightarrow a=20+8 \Leftrightarrow a=28$;
sau $a=14c \Rightarrow a=14\times1$ dacă $c=1$ și $a=14\times2$ dacă $c=2$.
o) $a=7c+r$, iar $r=c+2$. Rezultă $a=7c+c+2 \Leftrightarrow a=8c+2$, în care $r<7$, adică $c+2<7$. Atunci $c\in\{0,1,2,3,4\}$. Din $a=8c+2$, rezultă:
dacă $c=0 \Rightarrow a=8\times0+2 \Rightarrow a=2$;
dacă $c=1 \Rightarrow a=8\times1+2 \Rightarrow a=10$;
dacă $c=2 \Rightarrow a=8\times2+2 \Rightarrow a=18$;
dacă $c=3 \Rightarrow a=8\times3+2 \Rightarrow a=26$;
dacă $c=4 \Rightarrow a=8\times4+2 \Rightarrow a=34$;
deci $a\in\{2,10,18,26,34\}$. Verificați.
p) $a=3c+r$, iar $r=c-2 \Rightarrow c=r+2$. Deoarece $r<3$, rezultă $c-2<3 \Rightarrow 2\leq c<3 \Rightarrow c\in\{2,3\}$. Din $a=3c+r$, rezultă:

dacă $c=2$, rezultă $2=r+2 \Rightarrow r=0$, iar $a=3\times2+0=6$;
dacă $c=3$, rezultă $3=r+2 \Rightarrow r=1$, iar $a=3\times3+1 \Rightarrow a=10$.

276. a) Deoarece $c=8r$ și $r<1\ 994$, rezultă $a=1\ 994\times8r+r \Leftrightarrow a=15\ 952r+r \Leftrightarrow a=15\ 953r$. Pentru a maxim, $r=1\ 993$, deci $a=15\ 953\times1\ 993==31\ 794\ 329$.

b) Deoarece $r=8c$ și $r<1\ 994$, rezultă $8c<1\ 994 \Leftrightarrow c<1\ 994 : 8 \Leftrightarrow c<249{,}25$. Pentru a maxim, $c=249$, deci $a=1\ 994\times c+8c \Leftrightarrow a=2\ 002c \Rightarrow a=2\ 002\times249 \Leftrightarrow a=498\ 498$.

277. Numerotăm locurile posibile cu numere de la **1** la **5**, iar valoarea premiului primit de fiecare elev dintre cei cinci, în ordinea locurilor, cu a, b, c, d și, respectiv, e. Rezultă că se poate scrie: $1a=2b=3c=4d=5e$, în care numai **3** asemenea produse sînt egale. Știind că suma celor **3** produse egale este **20 475**, rezultă că un produs este $20\ 475 : 3=6\ 825$. Dintre cele **5** produse, ținînd cont de faptul că valoarea premiului este număr natural, alegem numai: $1a$, $3c$ și $5e$, deoarece: $1a=6\ 825 \Rightarrow a=6\ 825 : 1 \Rightarrow 6\ 825 \Rightarrow a\in N$;
$3c=6\ 825 \Rightarrow c=2\ 275 \Rightarrow c\in N$;
$5e=6\ 825 \Rightarrow e=1\ 365 \Rightarrow e\in N$;
$2b=6\ 925 \Rightarrow b\notin N$;
$4d=6\ 825 \Rightarrow d\notin N$.
Răspuns: Cei trei reprezentanți s-au clasat pe locurile **1**, **3** și **5**.

278. Așa-numita metodă „încercare și eroare” poate fi utilizată, dar cînd avem numere mai mari aceasta este incomodă. Din practică știm:
1) Suma a două numere naturale pare este un număr par (de forma $2n$, căci prin împărțirea sumei la **2** obținem cîtul n).
2) Suma a două numere naturale impare este un număr par.
3) Suma dintre un număr natural par și un număr natural impar este un număr impar de forma $2n+1$.
4) Produsul dintre un număr par și un număr impar este un număr par; rezultă astfel că și produsul a două numere consecutive este un număr par.
5) Produsul dintre două numere impare este un număr impar.
6) Produsul a două numere pare este un număr par.
a) <u>Rezolvarea 1</u> Pe baza regulilor de mai sus, deducem că $3b$ este un număr par, deoarece **12** și $2a$ sînt numere pare, iar număr par minus număr par dă număr par. Dacă $3b$ este număr par și $3b\leq12$ (un termen nu poate fi mai mare decît suma), rezultă $3b\in\{0,6,12\}$, iar $b\in\{0,2,4\}$.
Dacă $b=0$, rezultă $a=(12-3\times0) : 2 \Rightarrow a=6$;
dacă $b=2$, rezultă $a=(12-3\times2) : 2 \Rightarrow a=3$;
dacă $b=4$, rezultă $a=(12-3\times4) : 2 \Rightarrow a=0$.
Perechile de numere naturale (a,b) sînt: $(6,0)$, $(3,2)$, $(0,4)$.
<u>Rezolvarea 2</u> $2a=12-3b \Leftrightarrow a=\frac{12-3b}{2} \Leftrightarrow a=6-\frac{3b}{2}$, în care $\frac{3b}{2}\leq6$ și $(b : 2)\in N$. Rezultă (b,a) : $(0,6)$, $(2,3)$, $(4,0)$.

b) 1) $12+\overline{...0}+33=\overline{...5}$ (ultima cifră a sumei).

2) $\overline{...0}+\overline{...0}+2=\overline{...2}$.

3) $\overline{...4}+\overline{...1}+\overline{...5}=\overline{...0}$.

4) Sînt două cazuri:

– dacă $\overline{ab}$ este un număr par, $\overline{ab}\times 5=\overline{...0}$, iar $\overline{...0}+\overline{...0}=\overline{...0}$;

– dacă $\overline{ab}$ este un număr impar, $\overline{ab}\times 5=\overline{...5}$, iar $\overline{...5}+\overline{...0}=\overline{...5}$.

5) $\overline{...0}+\overline{...0}=\overline{...0}$.

6) $\overline{aa5}-27=\overline{...5}-\overline{...7}=\overline{...8}$.

7) $\overline{...1}-(\overline{..6}+\overline{...4})=\overline{...1}-\overline{...0}=\overline{...1}$.

8) $\overline{...8}$.

9) $\overline{...9}\times\overline{...7}\times 7=\overline{...3}\times 7=\overline{...1}$.

10) $\overline{...9}\times\overline{...3}\times 3\times 3=\overline{...7}\times 3\times 3=\overline{...1}\times 3=\overline{...3}$.

c) 1) În asemenea exerciții (pe care elevii le întîlnesc mai ales cînd utilizează scrierea sistematică a numerelor), sînt necesare comparații între termeni (factori) și rezultate, cît și reguli practice privind ultima cifră a unui rezultat (a se vedea și regulile de la punctul a).

$500a+100b+15c+2d=753$. Un termen poate fi cel mult egal cu suma, adică $500a\leq 753$. Rezultă $a=1$, iar $100b+15c+2d=753-500 \Leftrightarrow 100b+15c+2d=253$. Deoarece $100b=\overline{...00}$, rezultă $15c+2d=\overline{...3}$. Se observă că $2d$ este un număr par, atunci $15c$ este un număr impar, căci suma terminată cu cifra 3 este un număr impar. Rezultă $15c=\overline{...5}$, iar $2d=\overline{...8}$, căci $\overline{...5}+\overline{...8}=\overline{...3}$. Dacă $2d=8 \Rightarrow d=4$, $a=1$, iar $100b+15c=$ $=253-8 \Leftrightarrow 100b+15c=245$. Deoarece $100b=\overline{..00}$, iar $100b\leq 245$, rezultă $b\leq 2$, iar $15c=\overline{...45}$. Dacă $b=2$, rezultă $15c=245-2\times 100 \Leftrightarrow 15c=45 \Leftrightarrow c=3$.

Soluția $b=1$ nu convine, căci $[(245-100):15]\notin \mathbf{N}$. Nici soluția $2d=18$ nu convine, căci $(235:15)\notin \mathbf{N}$. Deci: $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$.

2) Din $112a+22b+13c=195$ și $a\neq 0$, rezultă $112a\leq 195$, iar $a=1$. Atunci $22b+13c=195-112\times 1 \Leftrightarrow 22b+13c=83$. Se observă că $13c$ este un număr impar, deci c este un număr impar mai mic decît 7, căci $13\times 7>83$, iar $c\neq a$, deci $c\neq 1$. Dacă $c=5$, $22b=83-65 \Leftrightarrow 22b=18$, fals, căci $b\notin \mathbf{N}$; dacă $c=3$, rezultă $22b=83-3\times 13 \Leftrightarrow 22b=44 \Rightarrow b=2$. Deci $a=1$, $b=2$, $c=3$.

3) Din $1\,000a+200b+30c+4d=1\,986$ și $a\neq 0$, rezultă $a=1$, căci $1\,000a\leq 1\,986$, iar $200b+30c+4d=986/:2 \Rightarrow 100b+15c+2d=493$. De aici putem continua ca în exercițiul 1 de mai sus sau, mai pe scurt: din $100b+15c+2d=493 \Rightarrow b\leq 4$; dar $c\leq 9$, $d\leq 9$ (căci sînt cifre); dacă c și d

ar avea valori maxime, atunci $15c+2d=15\times9+2\times9=153$, iar $100b=340$, ceea ce nu convine. Rezultă $b=4$, iar $15c+2d=493-400 \Leftrightarrow 15c+2d=93$. Deoarece $2d$ este un număr par, iar 93 este o sumă impară, rezultă că $15c$ este un număr impar, deci c este un număr impar. Dacă $c=3$, $(c\neq1)$, rezultă $d>9$, ceea ce nu convine; dacă $c=5$, rezultă $2d=93-15\times5 \Rightarrow d=9$. Deci $a=1$, $b=4$, $c=5$, $d=9$.

4) Din enunț rezultă: $200b+1\ 010c=\overline{\ldots0}$, $10\ 001d+1\ 011a=\overline{\ldots1}$, $d<8$, iar $\overline{\ldots1}\times d+\overline{\ldots1}\times a=\overline{\ldots1}$, adică $\overline{\ldots7}+\overline{\ldots4}=\overline{\ldots1}$. Dacă $d=7$, $a=4$, iar $200b+1\ 010c=81\ 111-(70\ 007+4\ 044) \Leftrightarrow 200b+1\ 010c=7\ 060$.
Deoarece $200b=\overline{\ldots00}$, rezultă $1\ 010c=\overline{\ldots60}$, deci $c=6$, iar $b=(7\ 060-6\times1\ 010):200 \Rightarrow b=5$. Deci $a=4$, $b=5$, $c=6$ iar $d=7$.
5) Dacă un termen și suma sînt pare, rezultă că și celălalt termen, $7c$, este un număr par, deci c este un număr par. Suma maximă se obține dacă $b=9$ și $c=8$, adică $26a\leq54+56 \Leftrightarrow 26a\leq110 \Rightarrow a\leq4$.
Dacă $a=4$, rezultă $104=6b+7c$, deci $c=8$, iar $b=8$, ceea ce nu convine. Dacă $a=3$, rezultă $26\times3=6b+7c \Rightarrow b=c=6$, ceea ce contrazice enunțul; dacă $a=2$ sau $a=1$, rezultă $b=c=4$, respectiv $b=c=2$, ceea ce, de asemenea, contrazice enunțul.
Sarcină suplimentară: Eliminați o condiție din enunț, astfel încît exercițiul c.5. să aibă mai multe soluții.
6) $81a=101b+101c+1 \Leftrightarrow 81a=101(b+c)+1$. Pentru a maxim, rezultă $81a=81\cdot9$. Rezultă apoi că produsul $101(b+c)$ are cifra zecilor zero, ca și $81\times a$, ceea ce duce la $a=5$ (De ce? $101(b+c)\leq81\times9 \Leftrightarrow 101(b+c)\leq$ $\leq729 \Rightarrow b+c\leq7$).
Rezultă: $81\times5=101(b+c)+1 \Leftrightarrow 405=101(b+c)+1 \Leftrightarrow b+c=$ $=(405-1):101 \Rightarrow b+c=4$. Deci $(b,c)\in\{(1,3),(3,1)\}$.
7) $a-b-c=6 \Leftrightarrow a=6+b+c$, în care $a<10$, iar $a\neq b\neq c\neq0$. Pentru valoarea maximă $a=9$ rezultă $9=6+b+c$, deci $b+c=3$, adică $(b,c)\in\{(1,2),(2,1)\}$. Pentru $a=8$, rezultă $8=6+b+c$, deci $b+c=2$, dar $b\neq c$; nu convine nici $a=7$ sau $a=6$, căci $b\neq c\neq0$.
8) $a-b-3c=2 \Rightarrow a=2+b+3c$, în care $a<10$, iar $a\neq b\neq c\neq0$. Pentru valoarea maximă $a=9$, rezultă $9=2+b+3c$, deci $b+3c=7$, adică $(b,c)\in\{(1,2),(4,1)\}$. Pentru $a=8$, rezultă $6=b+3c$, adică $(b,c)\in\{(3,1)\}$.
9) În $11a+2b=101$, $2b<20$, iar $11a$ este un număr impar, ce se împarte exact la 11, mai mare decît 80. Unica soluție: $a=9$, iar $b=(101-99):2 \Rightarrow$ $b=1$.
10) $99\overline{ab}-99=1\ 089 \Leftrightarrow 99(\overline{ab}-1)=1\ 089$; $\overline{ab}-1=1\ 089:99 \Leftrightarrow \overline{ab}=$ 12 sau: $99\overline{ab}=1\ 089+99 \Leftrightarrow 99\overline{ab}=1\ 198 \Leftrightarrow \overline{ab}=1\ 198:99 \Rightarrow \overline{ab}=12$.

279. Deoarece $4x$ este un număr par, $58y$ este un număr par, iar $2z$ tot un număr par, rezultă că și suma trebuia să fie un număr par, deci nu putea fi terminată în 5 (a se vedea regulile de la exercițiul nr.278).

280. a) Fie cele trei numere naturale consecutive: a, $a+1$ și $a+2$. Din enunț rezultă că 109 este suma a două dintre numere, iar $a+(a+1)+(a+2)=$ $=109+?$. Deoarece 109 este o sumă impară, rezultă că ea a fost obținută dintr-un număr par și unul impar (sau invers). În acest șir de 3 numere, primul și ultimul pot fi pare, iar cel din mijloc impar, sau primul și ultimul pot fi impare, iar cel din mijloc, par. Deci în compunerea sumei 109 pot intra primele două numere sau ultimele două, adică: $a+a+1=109$ sau $a+1+a+2=109$. În prima situație $2a=108 \Rightarrow a=54$, iar numerele sînt 54, 55, 56. În a doua situație $2a=106 \Rightarrow a=53$, iar numerele sînt 53, 54, 55.
b) Fie cele trei numere naturale consecutive: a, $a+1$, $a+2$. Rezultă: $?+98=a+a+1+a+2$. Deoarece 98 este o sumă pară, rezultă că ea a fost obținută din 2 numere pare sau 2 numere impare. În acest șir de 3 numere consecutive primul și ultimul dintre ele pot fi pare sau pot fi impare. Rezultă că suma dintre primul și ultimul număr este 98, adică $a+a+2=98 \Rightarrow$ $2a=96 \Rightarrow a=48$. Numerele sînt: 48, 49, 50.

281. <u>Rezolvarea 1</u>
Exemplu numeric: $a=26$, $b=8$. Rezultă $26:8=3$ (rest 2), adică $26=8\times3+2$, în care $2<8$. Atunci: $(2\times26):(2\times8) \Rightarrow 52:16=3$, rest 4. Deci, la împărțirea cu rest, dacă mărim deîmpărțitul și împărțitorul de un număr de ori, restul se mărește de același număr de ori, iar cîtul este tot același (unic).
Răspuns: Cîtul este tot q, iar restul este $2r$.
<u>Rezolvarea 2</u>
Pe baza teoremei împărțirii cu rest (a împărțirii întregi), enunțul devine: $a=bq+r$, în care $0\leq r<b$; $2a=2b\times q_1+r_1$; $q_1=?$; $r_1=?$. Cum se ajunge de la prima egalitate la a doua? Prin înmulțirea cu 2 a fiecărui membru al primei egalități, adică $a=bq+r/\times2 \Rightarrow 2a=2bq+2r$. Se observă că $2\times bq=$ $=(2b)\times q$, deci $q=q_1$, cîtul fiind unic; $0\leq 2r<2b$. Rezultă $r_1=2r$.
Răspuns: Cîtul este tot q, iar restul este $2r$.

282. Camelia a aplicat proprietatea potrivit căreia, la împărțirea exactă, dacă micșorăm atît deîmpărțitul cît și împărțitorul de același număr de ori, cîtul rămîne neschimbat. Or, împărțirea din enunț are restul diferit de zero (împărțire neexactă); ca atare, și restul s-a micșorat de același număr de ori. Numărul 5 este rest pentru împărțirea 23 : 6, nu la împărțirea ce trebuia efectuată (a se vedea și rezolvarea de la exercițiul anterior).
Dinu a arătat corect restul, căci potrivit teoremei împărțirii cu rest, $23\ 000=6\ 000\times3+5\ 000$, iar $23\ 000\neq6\ 000\times3+5$.
<u>Observație</u>: Această proprietate se aplică numai dacă și deîmpărțitul și împărțitorul, (deci și restul) se împart exact (sînt divizibili cu) la același număr.

283. <u>Rezolvarea 1</u>
a) $8+3=11$;

b) $4+6=10$;
c) $8+4=12$;
d) $5+4=9$;
e) $7-3=4$;
f) $7-4=3$.

Rezolvarea 2

Aplicînd regula: „Dacă fiecare termen al sumei sau al diferenței se împarte exact la un număr, atunci și suma sau diferența se împarte exact la acel număr", putem scrie:

a) $64 : 8+24 : 8=(64+24) : 8=88 : 8=11$;
b) $(36+54) : 9=90 : 9=10$;
c) $(56+28) : 7=84 : 7=12$;
d) $(30+24) : 6=54 : 6=9$;
e) $(63-27) : 9=36 : 9=4$;
f) $(56-32) : 8=24 : 8=3$.

Observație: Reciproca regulii nu este valabilă, căci $(3+5) : 8=8 : 8=1$, dar $3 : 8=0$ (rest 3).

284. $71 : 9=7$ (rest 8) $\Rightarrow 71=9\times7+8$;
$73 : 9=8$ (rest 1) $\Rightarrow 73=9\times8+1$;
$55 : 9=6$ (rest 1) $\Rightarrow 55=9\times6+1$, iar $(71+55) : 9=126 : 9=14$ (rest 0), dar $(73+55) : 9=128 : 9=14$ (rest 2).
Din ce cauză în prima situație suma se împarte exact la 9, iar în a doua, nu? Deoarece suma resturilor în primul caz este $8+1=9$, care se împarte exact la 9, iar în al doilea caz suma resturilor este $1+1=2$, care nu se împarte exact la 9, căci $2 : 9=0$ (rest 2).

Generalizare

Fie numerele a, b și c. Dacă $a=cd+r_1$ și $b=cq+r_2$, atunci $a+b=cm+0$, numai dacă $r_1+r_2=cn+0$.

285. $56 : 6=9$ (rest 2) $\Rightarrow 56=6\times9+2$;
$57 : 6=9$ (rest 3) $\Rightarrow 57=6\times9+3$;
$38 : 6=6$ (rest 2) $\Rightarrow 38=6\times6+2$; iar $(56-38) : 6=18 : 6=2$ (rest 0), dar $(57-38) : 6=19 : 6=3$ (rest 1).
Din ce cauză în primul caz diferența se împarte exact la 6, iar în al doilea, nu? Deoarece diferența resturilor în primul caz are valoarea $2-2=0$, valoare care se împarte exact la 6, căci $0 : 6=0$, iar în al doilea caz diferența resturilor are valoarea $3-2=1$, care nu se împarte exact la 6, căci $1 : 6=0$ (rest 1).

Generalizare

Fie numerele naturale a, b și c. Dacă $a=cd+r_1$ și $b=cq+r_2$, atunci $a-b=cm+0$, numai dacă $r_1-r_2=0$.

286. $72 : 7=10$ (rest 2) $\Rightarrow 72=7\times10+2$. În celelalte împărțiri date, deîmpărțitul se mărește sau se micșorează cu un număr ce se împarte exact la 7. Deci

cîturile și resturile vor fi: $10+(14:7)=12$ (rest 2); $10+(21:7)=13$ (rest 2); $10-(14:7)=8$ (rest 2); $10-(21:7)=7$ (rest 2).

Generalizare

Dacă deîmpărțitul se mărește sau se micșorează cu un număr ce se împarte exact la împărțitor, restul nu se schimbă, iar cîtul dat se mărește sau se micșorează cu cîtul dintre numărul cu care se operează asupra deîmpărțitului și împărțitorului inițial.

287. $102\times6=612 \Leftrightarrow 612:102=6$

a) $714=612+102$, iar $102:102=1$, rezultă $714:107=7$, căci $6+1=7$.

b) $614=612+2$, iar $2:102=0$ (rest 2), rezultă $614:102=2$ (rest 2).

c) $916=612+304$, iar $304:102=2$ (rest 100), rezultă $916:102=8$ (rest 100), căci $6+2=8$, iar $100<102$.

d) $510=612-102$, iar $102:102=1$, rezultă: $510:102=5$, căci $6-1=5$.

e) $610=612-2$, rezultă $610:102=5$, rest 100, căci $102-2=100$ iar $6-1=5$.

f) $926=612+314$, iar $314:102=3$ (rest 8), rezultă $926:102=9$ (rest 8), căci $6+3=9$, iar $8<102$.

g) $296=612-316$, iar $316=102\times3+10$, rezultă $296:102=2$ (rest 92), căci $6-4=2$, iar $102-10=92$.

288. a) 8 numere.

b) Dacă de la 1 la 8 sînt 8 numere, rezultă că de la 2 la 8 sînt 7 numere, căci $8-1$ (numărul 1 lipsește) $=7$ (numere).

c) $8-2=6$ (numere) (Nu luăm în calcul numerele 1 și 8).

d) $8-1-2=5$ (numere).

e) $16-5=11$ (numere) sau $2(8-3)+1=2\cdot5+1=11$ (numere).

f) $16-6-1=9$ (numere) sau $2(8-3)-1=2\times5-1=9$ (numere).

g) $91(90-89)+1=91\times1+1=92$ (numere) sau: $8\,190-(8\,099-1)=8\,190-8\,098=92$ (numere).

h) $91(90-89)-1=91\cdot1-1=90$ (numere) sau: $8\,190-(8\,099+1)=8\,190-8\,100=90$ (numere).

i) $4\times9-4\times5+1=4(9-5)=4\times4=16$ (numere) sau: $36-20=16$ (numere).

j) $4\times9-4\times5+1=4(9-5)+1=16+1=17$ (numere) sau: $36-(20-1)==36-19=17$ (numere).

k) Asemănător cu exercițiul f): 9 numere.

l) $)24-16):2-1=8:2-1=4-1=3$ (numere) sau: $12-8-1=4-1=3$ (numere)

m) $(32-20):4+1=12:4+1=3+1=4$ (numere) sau: $8-5+1=3+1=4$ (numere).

289. a) Deoarece șirul începe cu un număr impar și se termină cu un număr par, iar în șir după un număr impar urmează un număr par, rezultă că jumătate din cele 20 de numere sînt impare, adică $20:2=10$ numere (iar cealaltă jumătate sînt numere pare).

b) Cîte numere consecutive sînt de la **4** la **33**? **33 − 4 + 1 = 30** sau **33 − 3 = 30**. Dacă șirul începe cu un număr par și se termină cu un număr impar, înseamnă că **30 : 2 = 15** sînt numere impare, iar celelalte **15** sînt numere pare.

c) Deoarece șirul începe și se termină cu un număr impar, rezultă că jumătate plus **1** sînt numere impare. De la **1** la **31** sînt **31** numere consecutive. **31 = 2 × 15 + 1**, deci **15 + 1 = 16** numere sînt impare.

d) Cîte numere consecutive sînt de la **15** la **75**? **75 − 15 + 1 = 61** sau **75 − 14 = 61** (numere). **61 : 2 = 30** (rest **1**), rezultă **30 + 1 = 31** (numere impare).

290. a) Deoarece șirul începe cu un număr par și se termină cu un număr impar, iar în șir după un număr par urmează un număr impar, rezultă că din cele **81 − 5 = 76** numere, jumătate, adică **76 : 2 = 38** sînt numere pare (iar celelalte **38** sînt numere impare).

b) Cîte numere consecutive sînt? **40 − 8 = 32** sau **40 − 9 + 1 = 32** (numere). **32 : 2 = 16** numere pare (și **16** numere impare, deoarece șirul începe cu un număr impar și se termină cu un număr par).

c) Din cele **60** de numere, **60 : 2 = 30** numere sînt pare (și **30** sînt impare).

d) Cîte numere consecutive sînt? **84 − 7 = 77** sau **84 − 8 + 1 = 77** (numere). Deoarece șirul începe și se termină cu un număr par, rezultă că jumătate plus **1** vor fi numere pare, adică: **77 = 2 × 38 + 1**; **38 + 1 = 39** (numere pare) și **38** numere impare.

291. a) Pentru a obține aceeași sumă, adunăm primul cu ultimul număr din șir, al doilea cu penultimul, al treilea cu antepenultimul ș.a.m.d. adică **1 + 70 = 2 + 69 = 3 + 68** etc.
Cîte numere sînt în șirul dat? **70** numere.
Cîte perechi de numere care dau aceeași sumă se pot forma din cele **70** de numere? **70 : 2 = 35** (perechi cu suma **71**.)

b) Cîte numere sînt în șirul dat? **85 − 2 = 83** sau **85 − 3 + 1 = 83** (numere). Cîte perechi cu aceeași sumă se pot forma din cele **83** de numere? **83 = 2 × 41 + 1**. Rezultă că se pot forma **41** de perechi, iar un număr este fără pereche (care se află împărțind suma obținută la **2**, adică **88 : 2 = 44**).

c) Cîte numere sînt în șirul dat? **94 − 7 = 87**. Cîte perechi cu aceeași sumă se pot forma cu cele **87** de numere? **87 = 2 × 43 + 1**. Rezultă că se pot forma **43** de perechi, iar un număr este fără pereche (tocmai numărul **51**, căci **102 : 2 = 51**).

d) Cîte numere sînt de la **7** la **36**? **36 − 6 = 30** sau **36 − 7 + 1 = 30** (numere). Cîte perechi cu aceeași sumă se pot forma? **30 : 2 = 15**.

e) Cîte numere sînt de la **6** la **51**? **51 − 5 = 46** sau **51 − 6 + 1 = 45 + 1 = 46** (numere). Cîte perechi cu aceeași sumă se pot forma? **46 : 2 = 23**

292. a) Cîte numere pare sînt în șirul dat? **80 : 2 = 40** (a se vedea explicațiile de la exercițiul **290**.a.). (Șirul este: **2, 4, 6, 8, 10,...,80**, iar suma unei perechi este **2 + 80 = 82**).

Cîte perechi se pot forma cu cele 40 de numere pare? 40 : 2=20 (perechi).
b) Cîte numere impare sînt în șirul dat? 80 : 2=40 (Șirul este: 1, 3, 5, 7, 9, ..., 79, iar suma unei perechi este 1+79=80).
Cîte perechi se pot forma cu cele 40 de numere impare? 40 : 2=20 (perechi).
c) Cîte numere sînt în șirul dat? 85−2=83 sau 86−3+1=83 (numere).
Cîte numere pare sînt în cele 83 de numere? 83=2×41+1. Deci sînt 41 numere pare și 42 numere impare. (Șirul numerelor pare este: 4, 6, 8, ..., 84, iar suma unei perechi este 4+84=88).
Cîte perechi care au aceeași sumă se pot forma din cele 41 de numere pare? 41=2×20+1, adică se pot forma 20 perechi, iar un număr este fără pereche, acesta fiind 88 : 2=44.
d) Cîte numere consecutive sînt în șirul dat? 85−2=83 sau 85−3+1=83.
Cîte numere impare sînt în cele 83 de numere? 83=2×41+1. Deci sînt 41+1 numere impare (șirul începe și se termină cu un număr impar). (Șirul numerelor impare este: 3, 5, 7, ..., 85, iar suma unei perechi este 3+85=88).
Cîte perechi care au aceeași sumă se pot forma cu cele 42 de numere impare? 42 : 2=21 (perechi).
e) Cîte numere sînt de la 8 la 94? 94−7=87 sau 94−8+1=87.
Cîte numere pare sînt în acest șir? 87=2×43+1. Deci sînt 44 numere pare (și 43 impare). (Șirul numerelor pare este: 8, 10, 12, ..., 94, iar suma unei perechi este 8+94=102).
Cîte perechi care au aceeași sumă se pot forma cu cele 44 de numere pare? 44 : 2=22 (perechi).
f) În șirul dat sînt 87 numere consecutive și 43 numere impare. (Șirul numerelor impare este: 9, 11, 13, 15, ..., 93, iar suma unei perechi este 9+93=102).
Cîte perechi care au aceeași sumă se pot forma cu 43 de numere impare? 43=2×21+1. Deci sînt 21 de perechi și un număr fără pereche, acesta fiind 51, adică 102 : 2=51.
g) Cîte numere consecutive sînt în șirul dat? 36−6=30 sau 36−7+1=30.
Cîte numere pare sînt în cele 30 de numere? 30 : 2=15, deoarece șirul începe cu un număr impar și se sfîrșește cu un număr par.
Cîte perechi se pot forma cu cele 15 numere pare? 15=2×7+1. Deci se pot forma 7 perechi, fiecare avînd suma 6+36=42, iar un număr este fără pereche, acesta fiind 42 : 2=21.
h) Între cele 30 numere consecutive, 15 sînt impare.
Cîte perechi se pot forma cu cele 15 numere impare? 15=2×7+1. Deci se pot forma 7 perechi, fiecare avînd suma 7+35=42, iar un număr este fără pereche, acesta fiind 42 : 2=21.
i) Cîte numere consecutive sînt în șirul dat? 51−5=46 sau 51−6+ +1=46 (numere).

Cîte numere pare sînt între cele 46 de numere? $46 : 2 = 23$. Șirul numerelor pare este: 6, 8, 10, 12, ..., 50, iar o pereche are suma $6 + 50 = 56$.
Cîte perechi se pot forma din cele 23 numere pare? $23 = 2 \times 11 + 1$. Deci se pot forma 11 perechi, fiecare avînd suma 56, iar un număr este fără pereche, acesta fiind $56 : 2 = 28$.
j) Între cele 46 de numere consecutive, 23 numere sînt impare; cu acestea se pot forma 11 perechi, fiecare avînd suma $7 + 51 = 58$, iar un număr este fără pereche (acesta fiind $58 : 2 = 29$).

293. a) Ce sumă au cele două numere ce formează o pereche? $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 101$. Atunci $53 + ? = 101$. Rezultă că lui 53 îi corespunde 48, căci $101 - 53 = 48$, iar lui 68 îi corespunde 33, deoarece $101 - 68 = 33$.
b) 1) Deoarece $y + 2$ este o sumă pară (numai astfel se obține un număr natural), iar 2 este un număr par, rezultă că y este un numar par mai mic decît 1 000 (căci număr par plus număr par dă o sumă pară). Deci $y \in \{2,4,6,8,\ldots,998\}$. Cîte astfel de numere sînt? De la 2 la 998 sînt 997 numere <u>consecutive</u>, dintre care jumătate sînt impare, iar jumătate plus 1 sînt numere pare (căci șirul începe și se termină cu număr par), adică $997 = 2 \times 498 + 1$; deci sînt 499 numere (pare).
2) Deoarece $y + 1$ este o sumă pară, iar 1 este un număr impar, rezultă că y este un număr impar mai mic decît 1 000, adică $y \in \{1,3,5,7,9,\ldots,999\}$. Cîte astfel de numere sînt? De la 1 la 999 sînt 999 de numere <u>consecutive</u>, dintre care jumătate sînt pare, iar jumătate plus 1 sînt impare (șirul începe și se termină cu un număr impar), deci sînt 500 numere (impare).
3) Pentru că $y + 5$ să fie număr par, este necesar ca y să fie număr natural impar. Deci $y \in \{1,3,5,\ldots,997,999\}$, adică 500 numere (impare).
4) y este un număr natural par. Deci $y \in \{0,2,4,\ldots,996,998\}$, adică 500 numere (pare).

294. a) Din enunț rezultă $y + 1$ divide 100. Deci $(y + 1) \in \{1,2,,4,5,10,20,25,50\}$. Rezultă $y \in \{0,1,3,4,9,19,24,49\}$.
b) $y \in \{0,2,3,8,18,23,48\}$.

295. Cel mai mare număr impar de două cifre este 99. Dacă cifra zecilor este mai mică decît cifra unităților, numărul este 89.

296. $987 - 111 = 876$.

297. Sînt mai multe soluții:
a) $\underline{101} + 102 + 103 = 306$;
b) $100 + \underline{101} + 102 = 303$;
c) $99 + 100 + \underline{101} = 300$.

298. Sînt mai multe soluții:
a) $\underline{1\,002} + 1\,004 + 1\,006 + 1\,008 = 4\,020$;
b) $1\,000 + \underline{1\,002} + 1\,004 + 1\,006 = 4\,012$;
c) $998 + 1\,000 + \underline{1\,002} + 1\,004 = 4\,004$;
d) $996 + 998 + 1\,000 + \underline{1\,002} = 3\,996$.

299. Care numere au produsul 33? $1 \times 33 = 3 \times 11 = 33$.
Dacă luăm prima pereche de factori, cînd îi adunăm, obținem 34, deci mai mult decît 33.
Dacă luăm a doua pereche, obținem $3 + 11 = 14$.
Ce numere am putea să adaugăm la 14, fără ca produsul 33 să se schimbe? Numai numărul 1, care este element neutru la înmulțire, adică:

$$3 + 11 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{?} = 3 \times 11 \times \underbrace{1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{?}.$$

Cîți termeni 1 vom putea adăuga, adică $14 + ? = 33$? Deci sînt 19 termeni 1, căci $33 - 14 = 19$.

300. Dacă $n = 1$, rezultă $(2 \times 5) \cdot 3 + 2 = 30 + 2 = 32$, iar $3 + 2 = 5$; dacă $n = 2$, rezultă $(2 \times 5) \cdot (2 \times 5) \cdot 3 + 2 = 300 + 2 = 302$, iar $3 + 0 + 2 = 5$; dacă $n = 3$, rezultă $(2 \times 5) \cdot (2 \times 5) \cdot (2 \times 5) \cdot 3 + 2 = 3\,000 + 2 = 3\,002$, iar $3 + 0 + 0 + 2 = 5$.
Se observă că numerele sînt de forma:

$$3\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ cifre } 0} + 2, \text{ adică } 3\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ cifre } 0}2$$

iar suma cifrelor oricărui număr de această formă este $3 + 2 = 5$, zero fiind element neutru la adunare.

301. a) Pentru a scrie cel mai mare număr în condițiile date, trebuie să folosim cît mai multe cifre 9, scrise pe ordinele superioare. Deci în față vom scrie $100 - 20 = 80$ cifre de 9, iar 20 vor fi cifra 1, adică:

$$\underbrace{99\ldots9}_{80 \text{ cifre}}\underbrace{111\ldots1}_{20 \text{ cifre}}$$

b) Pentru a scrie cel mai mic număr în condițiile date trebuie să folosim cît mai multe cifre zero, scrise pe ordinele superioare. Vom scrie o cifră 1 în față, apoi 80 cifre zero, urmate de 19 cifre 1, adică:

$$1\underbrace{000\ldots0}_{80 \text{ cifre}}\underbrace{111\ldots1}_{19 \text{ cifre}}$$

302. Observație: precedentul = predecesorul = numărul din față, în șirul numerelor naturale;
consecutiv = succesor = numărul care urmează, în șirul numerelor naturale.
a) Dacă $y + 2$ este predecesorul numărului 17, rezultă că $y + 2$ este mai mic decît 17 cu 1, adică $y + 2 = 17 - 1 \Leftrightarrow y + 2 = 16 \Leftrightarrow y = 16 - 2 \Leftrightarrow y = 14$.
b) Dacă $y + 2$ este precedentul lui 10, înseamnă că $y + 2$ este mai mic decît 10 cu 1, adică $y + 2 = 10 - 1 \Leftrightarrow y + 2 = 9 \Leftrightarrow y = 7$.
c) Dacă $y + 2$ este succesorul numărului 17, rezultă că $y + 2$ este mai mare decît 17 cu 1, adică $y + 2 = 17 + 1 \Leftrightarrow y + 2 = 18 \Leftrightarrow y = 18 - 2 \Leftrightarrow y = 16$.

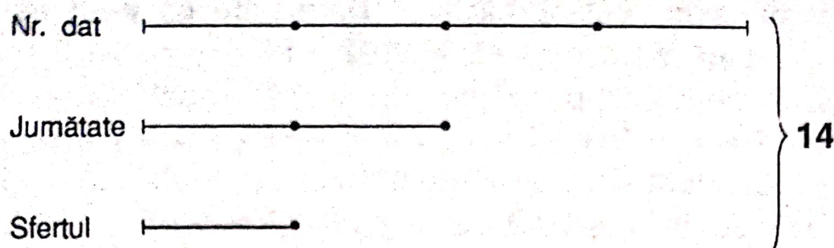
d) Dacă $y+2$ este consecutivul numărului **10**, rezultă că $y+2$ este mai mare decît **10** cu **1**, adică $y+2=10+1 \Leftrightarrow y+2=11 \Leftrightarrow y=11-2 \Leftrightarrow y=9$.
e) Dacă $y+2$ este consecutivul par al numărului **14**, rezultă că $y+2$ este mai mare cu **2** decît **14**, adică: $y+2=14+2 \Leftrightarrow y+2=16 \Leftrightarrow y=14$.
f) Dacă $y+2$ este precedentul impar al numărului **9**, rezultă că $y+2$ este mai mic decît **9** cu **2**, adică: $y+2=9-2 \Leftrightarrow y+2=7 \Leftrightarrow y=5$.
g) Dacă $y+2$ este consecutivul impar al numărului **9**, rezultă că $y+2$ este mai mare decît **9** cu **2**, adică $y+2=9+2 \Leftrightarrow y+2=11 \Leftrightarrow y=9$.

303. Folosim unul dintre procedeele utilizate la exercițiul **I.10.** din volumul I, adică pe baza tehnicilor de la exercițiile de mai sus:
$91+a\cdot(1+90)\times 90 : 2=91\times 91 \Leftrightarrow 91+a\times 91\cdot 45=91\times 91 \Leftrightarrow 91(1+45a)=$
$=91\times 91$ /:91 $\Leftrightarrow 1+45a=91$ /-1 $\Leftrightarrow 45a=90 \Rightarrow a=90 : 45 \Leftrightarrow a=2$.

304. Aplicînd reguli de calcul rapid (a se vedea ex.I.10. din volumul I), pe etape obținem:
I) $2(1+2+3+4+\ldots+500)-(1+3+5+\ldots+999)=2\cdot(1+500)\cdot$
$\cdot 500 : 2-(1+999)\cdot(500 : 2)=250\,500-250\,000=500$;
II) $2(1+2+3+\ldots+50)-(1+3+5+\ldots+99)=2(1+50)\cdot 50 : 2-$
$-(1+3+5+\ldots+99)=2\times(1+50)\cdot 50 : 2-(1+99)\cdot(50 : 2)=2\,550-$
$-2\,500=50$;
III) $2(1+2+3+4+5)-(1+3+5+7+9)=30-25=5$; Rezultă:
$500 : (50\cdot 5)=500 : 250=2$.
sau:
I) În prima parte a parantezei rotunde sînt numerele consecutive pare de la **2** la **1 000** inclusiv, iar în a doua parte (care sînt scăzute), numerele consecutive impare de la **1** la **999** inclusiv. În loc să scădem suma numerelor (din a doua parte a primei paranteze), putem scădea pe rînd fiecare termen al acesteia. Cum? Deoarece $2-1=1$, iar $4-3=1$ etc., rezultă că putem scrie operațiile din prima paranteză astfel: $(2-1)+(4-3)+$ $+(6-5)+\ldots+(1\,000-999)$. Fiecare scădere are rezultatul **1**. Cîte astfel de scăderi avem? Atîtea scăderi (deci atîtea rezultate egale cu **1**), cîte numere pare (sau impare) sînt de la **2** la **1 000** (impare, de la **1** la **999**). Cîte numere pare sînt de la **2** la **1 000**? De la **1** la **1 000** sînt **1 000** numere consecutive, de la **2** la **1 000** sînt **999** numere consecutive, dar **500** numere consecutive pare.
Deci: $(2-1)+(4-3)+(6-5)+\ldots+(1\,000-999)=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{500 \text{ termeni}}=500$.

II și III) În mod similar, obținem că primul factor din paranteza dreaptă are ca rezultat **50**, iar al doilea, **5**.
Atunci: $500 : (50\cdot 5)=500 : 250=2$.

305. a) Rezolvarea 1
O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că **7** sferturi din număr reprezintă **14**, un sfert fiind **2**, iar numărul căutat este **8**, căci **4 × 2 = 8**.

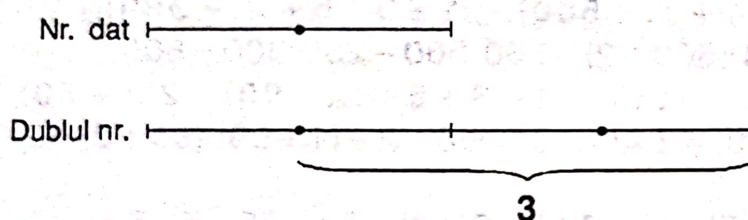
<u>Rezolvarea 2</u>

Notăm numărul căutat cu ***y***. Atunci

$$y+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y=14 \Leftrightarrow \frac{4}{4}y+\frac{2}{4}y+\frac{1}{4}y=14 \Leftrightarrow \frac{7}{4}y=14 \Leftrightarrow y=14:7\times4 \Leftrightarrow y=8$$

b) <u>Rezolvarea 1</u>

O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că **3** jumătăţi din numărul dat reprezintă **3**, iar o jumătate este **1**.

Numărul cerut este **2 × 1 = 2**.

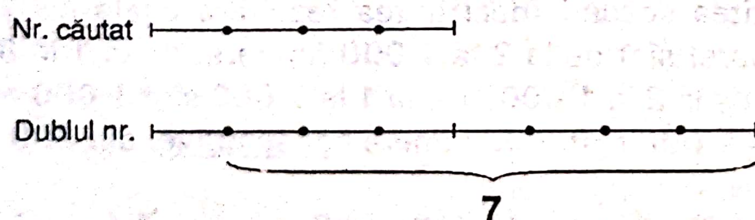
<u>Rezolvarea 2</u>

Notăm cu ***y*** numărul cerut. Atunci:

$$2y-\frac{1}{2}y=3 \Leftrightarrow \frac{4}{2}y-\frac{1}{2}y=3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}y=3 \Rightarrow y=3:3\times2 \Rightarrow y=2.$$

c) <u>Rezolvarea 1</u>

Reprezentarea grafică:



Din desen rezultă că **7** sferturi din număr reprezintă **7**, un sfert fiind **1**, iar numărul căutat este **4 × 1 = 4**.

<u>Rezolvarea 2</u>

Notăm cu ***y*** numărul căutat. Atunci:

$$2y-\frac{1}{4}=7 \Leftrightarrow \frac{8}{4}y-\frac{1}{4}y=7 \Leftrightarrow \frac{7}{4}y=7 \Rightarrow y=7:7\times4 \Rightarrow y=4.$$

d) Îndoitul unui număr înseamnă dublul acelui număr. Dublul jumătăţii unui număr este acel număr.

Rezolvarea 1

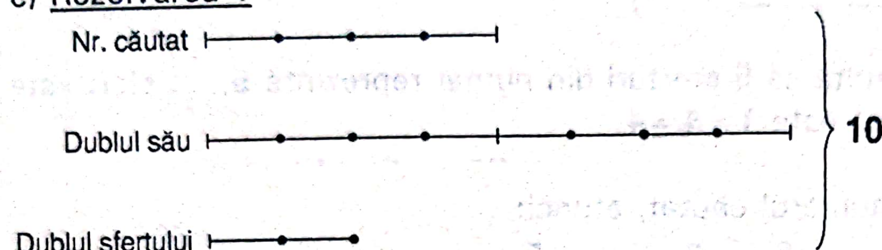
Dacă din dublul numărului scădem numărul (îndoitul jumătății sale) obținem numărul inițial. Deci numărul căutat este **2**.

Rezolvarea 2

Notăm cu y numărul căutat.

$$2y+2\cdot\frac{1}{2}y=2 \Leftrightarrow 2y-y=2 \Leftrightarrow y=2.$$

e) Rezolvarea 1



Din desen rezultă că **10** sferturi din număr reprezintă **10**, un sfert este **1**, iar numărul căutat este **4**, căci **10 : 10×4=4**.

Rezolvarea 2

Notăm cu y numărul căutat. Atunci:

$$2y+2\cdot\frac{1}{4}y=10 \Leftrightarrow 2y+\frac{2}{4}y=10 \Leftrightarrow \frac{8}{4}y+\frac{2}{4}y=10 \Leftrightarrow \frac{10}{4}y=10 \Leftrightarrow y=10 : 10\times4 \Leftrightarrow y=4.$$

f) Rezolvarea 1

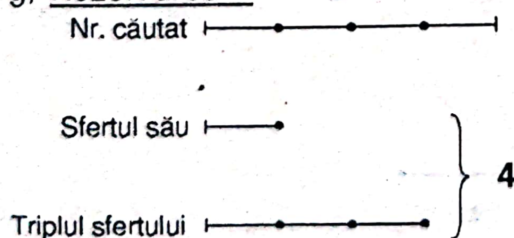
Rezultă că **3** jumătăți din număr reprezintă **3**, iar numărul este **3 : 3×2=2**.

Rezolvarea 2

Dacă y este numărul căutat, rezultă:

$$\frac{1}{2}y+2\cdot\frac{1}{2}y=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y+y=3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}y=3 \Rightarrow y=3 : 3\times2 \Leftrightarrow y=2.$$

g) Rezolvarea 1



Din desen rezultă că **4** sferturi din număr reprezintă **4**, tocmai numărul căutat, căci un întreg are patru sferturi.

Rezolvarea 2

Notînd numărul căutat cu y, putem scrie:

$$\frac{1}{4}y+3\cdot\frac{1}{4}y=4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}y+\frac{3}{4}y=4 \Leftrightarrow \frac{4}{4}y=4 \Leftrightarrow y=4.$$

h) Rezolvarea 1

Nr. căutat

Sfertul nr.

Triplul sfertului

Jumătatea nr.

5

Din desen rezultă că **5** sferturi din număr reprezintă **5**, un sfert este **1**, iar numărul căutat este $1 \times 4 = 4$.

Rezolvarea 2

Dacă y este numărul căutat, atunci:

$$3 \cdot \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}y = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{4}y + \frac{2}{4}y = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{4}y = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4}y = 1 \Rightarrow y = 1 \times 4 = 4.$$

i) Rezolvarea 1

Nr. căutat

Triplul său

3

Întreitul jumătăţii

Din desen rezultă că trei jumătăţi din număr reprezintă **3**, o jumătate **1**, iar numărul căutat este **2**, căci $3 : 3 \times 2 = 2$.

Rezolvarea 2

Notăm cu y numărul căutat. Atunci:

$$3y - 3 \cdot \frac{1}{2}y = 3 \Leftrightarrow 3y - \frac{3}{2}y = 3 \Leftrightarrow \frac{6}{2}y - \frac{3}{2}y = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}y = 3 \Rightarrow y = 3 : 3 \times 2 \Rightarrow y = 2$$

j) Numărul căutat

Jumătatea

Triplul jumătăţii

4

Sfertul nr.

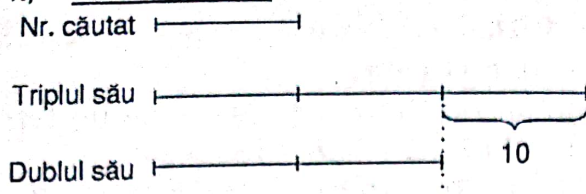
2 x sfertul

Din desen rezultă că **2** jumătăţi, adică numărul căutat, reprezintă **4**.

sau:

$$3 \cdot \frac{1}{2}y - 2 \cdot \frac{1}{4}y = 4 \Leftrightarrow \frac{6}{4}y - \frac{2}{4}y = 4 \Rightarrow y = 4.$$

k) Rezolvarea 1

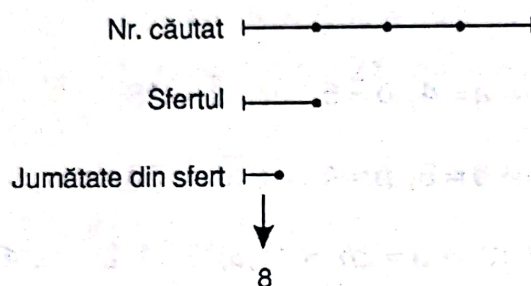


Din desen rezultă că numărul căutat este **10**.

Rezolvarea 2

$3y-2y=10 \Rightarrow y=10$.

l) Rezolvarea 1

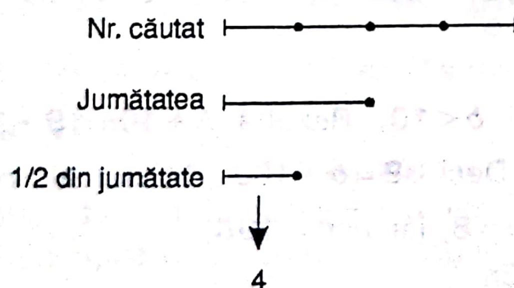


Din desen rezultă că sfertul numărului reprezintă $8+8=16$, iar numărul căutat este $4\times16=64$.

Rezolvarea 2

$\frac{1}{4}y:2=8 \Rightarrow \frac{1}{8}y=8 \Rightarrow y=8\times8 \Rightarrow y=64$.

m) Rezolvarea 1



Din desen rezultă că sfertul numărului căutat este **4**, iar numărul căutat este $4\times4=16$.

Rezolvarea 2

$\frac{1}{2}y:2=4 \Rightarrow \frac{1}{4}y=4 \Rightarrow y=4\times4 \Leftrightarrow y=16$.

306. Din $b+(a+c)=11$ și $b(a+c)=10$, rezultă că $b=1$, căci $11-10=1$, iar 1 la înmulțire este element neutru, Atunci $a+c=10$. Din $a+c=10$ și $a=2c+1$, rezultă $3c+1=9$, deci $c=3$, iar $a=7$.

307. Scriind sistematic numerele, obținem:
$100a+10b+c+10a+b+10b+c+10c+a+a+b+c=342 \Leftrightarrow$
$112a+22b+13c=342$, în care a, b și $c\neq 0$.
Din compararea sumei cu termenii, rezultă $a<3$, deoarece un termen nu poate fi mai mare decît suma, iar $112\times 3+22b+13c>342$.
Dacă $a=2$, atunci $112\times 2+22b+13c=342 \Rightarrow 22b+13c=342-224 \Leftrightarrow$ $22b+13c=118$. Se observă că 118 și $22b$ sînt numere pare. Rezultă că și $13c$ este un număr par, deci c este un număr par, adică $c\in\{2,4,6,8\}$.
Dacă $c=2$, rezultă $b=(118-2\times 3):2 \Rightarrow b\notin \mathbb{N}$, fals;
dacă $c=4$, atunci $b=(118-52):22 \Rightarrow b=3$;
dacă $c=6$ sau $c=8$, rezultă $b\notin \mathbb{N}$ (fals). La fel și pentru $a=1$.
Rezultă $\overline{abc}=234$.

308. a) $10a+b=5a+5b \left|\begin{matrix}-b\\-5a\end{matrix}\right. \Rightarrow 5a=4b \Rightarrow a=4,\ b=5$, iar $\overline{ab}=45$;

b) $10a+b=6a+6b \left|\begin{matrix}-b\\-6a\end{matrix}\right. \Rightarrow 4a=5b \Rightarrow a=5,\ b=4$, iar $\overline{ab}=54$;

c) $10a+b=7a+7b \left|\begin{matrix}-b\\-7a\end{matrix}\right. \Rightarrow 3a=6b/:3 \Rightarrow a=2b \Rightarrow (b,a)\in\{(1,2),(2,4),(3,6),$ $(4,8)\}$, iar $\overline{ab}\in\{21,42,63,84\}$.

d) $10a+b=8a+8b \left|\begin{matrix}-b\\-8a\end{matrix}\right. \Rightarrow 2a=7b \Rightarrow a=7,\ b=2$, iar $\overline{ab}=72$;

e) $10a+b=9a+9b \left|\begin{matrix}-b\\-9a\end{matrix}\right. \Rightarrow a=8b \Rightarrow a=8,\ b=1$, iar $\overline{ab}=81$;

f) $100a+10b+c=11a+11b+11c \left|\begin{matrix}-11a\\-10b\\-c\end{matrix}\right. \Rightarrow 89a=b+10c \Rightarrow 89a=\overline{cb} \Rightarrow a=1,$ $\overline{cb}=89$, iar $\overline{abc}=198$.
Sau: în $89a=b+10c$, $c<10$ și $b<10$. Rezultă $b+10c\leq 9+10\times 9 \Rightarrow$ $b+10c\leq 99 \Rightarrow 89a\leq 99 \Rightarrow a=1$. Deci $89=b+10c$. Deoarece $10c=\overline{\cdot 0}$, rezultă $b=9$, $c=(89-9):10 \Leftrightarrow c=8$, iar $\overline{abc}=198$;

g) $100a+10b+c=13a+13b+13c \left|\begin{matrix}-13a\\-10b\\-c\end{matrix}\right. \Rightarrow 87a=3b+12c/:3 \Rightarrow 29a=b+4c.$
Dacă $b+4c\leq 9+4\times 9 \Leftrightarrow b+4c\leq 45$, rezultă $29a\leq 45$, deci $a=1$, iar $29=b+4c$. Se observă că b este un număr impar mai mic decît 10, diferit de 0 și 1. Dacă $b=3$, rezultă: $c=(29-3):4 \Rightarrow c\notin \mathbb{N}$;
dacă $b=5$, rezultă $c=(29-5):4 \Rightarrow c=6$, iar $\overline{abc}=156$;
dacă $b=7$, rezultă $c=(29-7):4 \Rightarrow c\notin \mathbb{N}$;
dacă $b=9$, rezultă $c=(29-9):4 \Rightarrow c=5$, iar $\overline{abc}=195$.

h) $100a+10b+c=14a+14b+14c \left| \begin{array}{l} -14a \\ -10b \\ -c \end{array} \right. \Rightarrow 86a=4b+13c$. Pentru b și c valori maxime, avem $86a \leq 4 \cdot 9+13 \cdot 9 \Leftrightarrow 86a \leq 153$, rezultă $a=1$.
Din $86=4b+13c$, rezultă $13c$ este un număr par mai mic decît 86, adică $c<86 : 13 \Leftrightarrow c \leq 6$.

Dacă $c=6$, atunci $b=(86-13\times 6) : 4 \Rightarrow b=2$, iar $\overline{abc}=126$;
dacă $c=4$, atunci $b=(86-13\times 4) : 4 \Rightarrow b \notin \mathbf{N}$ (fals);
dacă $c=2$, atunci $b=(86-13\times 2) : 4 \Rightarrow b>10$ (fals).

i) $\overline{abc}=5 \cdot \overline{bc} \Leftrightarrow 100a+10b+c=5(10b+c) \Leftrightarrow 100a+10b+c=50b+5c \left| \begin{array}{l} -10b \\ -c \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$100a=40b+4c/:4 \Leftrightarrow 25a=10b+c \Leftrightarrow 25a=\overline{bc}$.

Dacă $a=1$, rezultă $\overline{bc}=25$; dacă $a=2$, rezultă $\overline{bc}=50$; dacă $a=3$, rezultă $\overline{bc}=75$.

Sau: $100a+\overline{bc}=5\overline{bc}/-\overline{bc} \Rightarrow 100a=4\overline{bc}/:4 \Leftrightarrow 25a=\overline{bc}$; atunci: $\overline{abc} \in \{125,250,375\}$.

j) $\overline{abc}=6\overline{bc} \Leftrightarrow 100a+10b+c=60b+6c \left| \begin{array}{l} -10b \\ -c \end{array} \right. \Leftrightarrow 100a=50b+5c/:5 \Leftrightarrow$

$20a=10b+c \Leftrightarrow 20a=\overline{bc}$. Dacă $a=1$, atunci $\overline{bc}=20$;

dacă $a=2$, atunci $\overline{bc}=40$; dacă $a=3$, atunci $\overline{bc}=60$; dacă $a=4$, atunci: $\overline{bc}=80$; dacă $a=5$, atunci $\overline{bc}=100$ (fals). Rezultă:

$\overline{abc} \in \{120,240,260,480\}$.

Sau: $\overline{abc}=6 \cdot \overline{bc} \Rightarrow 100a+\overline{bc}=6\overline{bc}/-\overline{bc} \Rightarrow 100a=5\overline{bc}/:5 \Leftrightarrow 20a=\overline{bc}$ etc.

k) $\overline{abc}=6\overline{ac} \Rightarrow 100a+10b+c=60a+6c \left| \begin{array}{l} -c \\ -60a \end{array} \right. \Rightarrow 40a+10b=5c/:5 \Rightarrow$

$8a+2b=c$.
Se observă că c este un număr par mai mic decît 10 (căci sînt 2 termeni pari), dar mai mare sau egal cu 8 (căci $a \neq 0$, iar suma trebuie să fie cel puțin egală cu un termen). Atunci $8a+2b=8$, în care $a=1$, iar $b=0$; deci $\overline{abc}=108$.

l) Scriind sistematic numerele, obținem:
$1\ 000a+100b+10c+d+100b+10c+d+10c+d+d=1\ 506 \Leftrightarrow$
$1\ 000a+200b+30c+4d=1\ 506$.
Deoarece $1\ 000a$ este un termen al sumei, el nu poate fi mai mare decît suma 1 506, deci $a=1$, iar $1\ 000a=1\ 000$. Atunci:
$200b+30c+4d=1\ 506-1\ 000 \Leftrightarrow 200b+30c+4d=506$. Se observă că $200b$ și $30c$ se termină în zero. Rezultă că $4d$ se termină în 6, adică d poate fi 4 sau 9, căci $4\times 4=\overline{\cdot 6}$, iar $4\times 9=\overline{\cdot 6}$. Dacă $d=4$, rezultă $200b+30c=506-4\times 4 \Leftrightarrow 200b+30c=490$. Din ultima egalitate rezultă

$b \in \{1,2\}$. Dacă $b=1$, atunci $30c=490-200=290$, fals, căci $290 : 30 \notin N$. Dacă $b=2$, atunci $30c=490-400 \Leftrightarrow 30c=90$, iar $c=90 : 30 \Leftrightarrow c=3$.

Rezultă $\overline{abcd}=1234$. Dacă $d=9$, rezultă $200b+30c=506-36 \Leftrightarrow 200b+30c=470$.

Rezultă $b \leq 2$. Dacă $b=1$, $30c=470-200 \Leftrightarrow 30c=270 \Leftrightarrow c=9$, ceea ce nu convine, căci $c \neq d$; dacă $b=2$, $30c= =470-400 \Leftrightarrow 30c=70 \Leftrightarrow c \notin N$.

Deci singura soluție: $\overline{abcd}=1234$.

m) $111a+210b+12c=900/:3 \Rightarrow 37a+70b+4c=300$.

Din enunț rezultă că a și $b \neq 0$. Din ultima egalitate rezultă că $37a$ este număr par, adică a este număr par, căci $70b$, $4c$ și 300 sînt numere pare. Dacă $b \neq 0 \Rightarrow 70b \geq 70 \times 1$, iar $37a \leq 300-70 \Leftrightarrow 37a \leq 230 \Rightarrow a$ număr par mai mic sau egal cu 6. Dacă $a=2$, atunci $70b+4c=300-37 \times 2 \Leftrightarrow$

$70b+4c=226$. Deoarece $70b=\overline{\cdot\cdot 0}$, iar $226=\overline{\cdot\cdot 6}$, rezultă că $4c=$

$=\overline{\cdot\cdot 6}$, adică $c \in \{4,9\}$. Dacă $c=4$, rezultă $70b=226-4 \times 4 \Leftrightarrow 70b=210$,

deci $b=210 : 70 \Leftrightarrow b=3$, iar $\overline{abc}=234$; dacă $c=9$, rezultă $70b=226-4 \times 9 \Leftrightarrow 70b=190 \Leftrightarrow b=190 : 70 \Leftrightarrow b \notin N$. Dacă $a=4$, atunci:

$70b+4c=300-37 \times 4 \Leftrightarrow 70b+4c=152$. Deoarece $70b=\overline{\cdot\cdot 0}$, rezultă

$4c=\overline{\cdot\cdot 2} \Rightarrow c$ poate fi 3 sau 8; dacă $c=3$, atunci $70b=152-4 \times 3 \Leftrightarrow$

$70b=140$, iar $b=2$, deci $\overline{abc}=423$; dacă $c=8$, atunci $70b=120$, iar $b=120 : 70$, fals. Dacă $a=6$, atunci $70b+4c=300-37 \times 6 \Leftrightarrow$

$70b+4c=78$; $b=1$, iar $4c=8$, adică $c=2$, iar $\overline{abc}=612$.

n) $100x+10y+z=11x+11y+11z \left| \begin{array}{l} -11x \\ -10y \\ \;\;-z \end{array} \right. \Rightarrow 89x=10z+y$. Se observă că

$10z+y \leq 10 \cdot 9+9 \Rightarrow 89x \leq 99 \Rightarrow x=1$. Deoarece $10z=\overline{\cdot\cdot 0}$, iar $89x=89$,

rezultă $y=9$, iar $10z=80 \Rightarrow z=8$. Deci $\overline{xyz}=198$. Sau $89x=\overline{zy} \Rightarrow x=1$, iar

$\overline{zy}=89$ etc.

o) $10x+y=21(x-y) \Rightarrow$ $10x+y=21x-21y \left| \begin{array}{l} -y \\ -10x \end{array} \right. \Rightarrow$ $0=11x-22y \Rightarrow$

$11x=22y/:11 \Leftrightarrow x=2y$. Rezultă $\overline{xy} \in \{21,42,63,84\}$.

309. Adunăm, membru cu membru, cele două egalități, obținînd:

$$\begin{array}{l} 7x+5y-z \;\;=8 \text{ și} \\ \underline{\qquad\;\; y+z \;=11} \\ 7x+6y \qquad =19 \end{array}$$

Deoarece 19 este sumă impară, iar $6y$ este un număr par, rezultă că $7x$ este număr impar mai mic decît 19, deci x este număr impar mai mic decît 3, căci $7 \times 3 > 19$. Unica soluție: $x=1$. Atunci $y=(19-7) : 2 \Rightarrow y=2$, iar

$z=11-2 \Rightarrow z=9$. Deci $\overline{xyz}=129$.

310. 1) $a+ab=7 \Leftrightarrow a(1+b)=7$. Care numere dau la înmulţire produsul 7? 1×7 şi 7×1. Rezultă că $a\in\{1,7\}$. Dacă $a=1$, atunci $1+b=7 \Rightarrow b=6$; dacă $a=7$, atunci $1+b=1 \Rightarrow b=0$. Deci $(a,b)\in\{(1,6),(7,0)\}$.

2) $b+ab=3 \Leftrightarrow b(1+a)=3$. Numerele care înmulţite dau produsul 3 sînt 1 şi 3 sau 3 şi 1. Deci $b\in\{1,3\}$. Dacă $b=1$, atunci $1+a=3 \Rightarrow a=2$; dacă $b=3$, atunci $1+a=1 \Rightarrow a=0$. Deci $(a,b)\in\{(2,1),(0,3)\}$.

311. a) Pe scurt: $\overline{abc}=8q+6$; $\overline{abc}$ minim = ? $\overline{abc}$ maxim = ? Cel mai mic număr de 3 cifre este 100, iar cel mai mare, 999. Care sînt cîturile şi resturile împărţirii acestor numere la 8? $100 : 8=12$ şi rest $4 \Leftrightarrow 100=8\times12+4$; $999 : 8=124$ şi rest $7 \Leftrightarrow 999=8\times124+7$. Se observă că prin împărţirea lui 100 la 8, restul este 4. Ca să obţinem restul 6, ar trebui să mai adăugăm la 100 diferenţa dintre 6 şi 4, adică 2; deci cel mai mic număr ce îndeplineşte condiţiile date este 102. La împărţirea lui 999 la 8, cîtul este 7, nu 6. Dacă din 999 scădem 1, diferenţa dintre 7 şi 6, obţinem numărul 998, care împărţit la 8 dă restul 6.

b) Numerele căutate sînt de forma $\overline{abc}=8q+6$. Şirul lor este: $8\times12+6$, $8\times13+6$, $8\times14+6$, $8\times15+6$, ..., $8\times123+6$, $8\times124+6$.
Pentru a calcula cîte astfel de numere sînt, trebuie să observăm că sînt diferite cîturile, care sînt numere consecutive (de la 12 la 124 inclusiv). Sînt deci 113 astfel de numere, căci $124-11=113$.

312. Asemănătoare cu problema anterioară. Pe scurt: $\overline{abcd}=39q+16$; $\overline{abcd}$ minim = ? $\overline{abcd}$ maxim = ?

a) Cel mai mic număr de 4 cifre este 1 000, iar $1\,000 : 39=25$, rest $25 \Rightarrow$ $1\,000=39\times25+25$. Însă $25=16+9$. Pentru a determina pe $\overline{abcd}$ minim, ar trebui să scădem din 1 000 pe 9, dar $991\neq\overline{abcd}$. Rezultă că q minim este 26, iar $\overline{abcd}=39\times26+16 \Leftrightarrow \overline{abcd}=1\,030$. Cel mai mare număr de 4 cifre este 9 999, iar $9\,999 : 39=256$, rest $15 \Leftrightarrow 9\,999=256\times39+15$. Însă $16=15+1$. Pentru a determina $\overline{abcd}$ maxim, ar trebui să adunăm 1 la 9 999, dar $10\,000\neq\overline{abcd}$. Rezultă că q maxim nu este 256, ci 255, iar $\overline{abcd}=9\,961$, căci $39\times255+16=9\,961$.

b) Deoarece primul termen este $39\times26+16$, iar ultimul este $39\times255+16$, rezultă suma: $39\times26+16+39\times27+16+39\times28+16+\ldots+39\times255+$
$+16=(39\times26+39\times27+39\times28+\ldots+39\times254+39\times255)+$
$+\underbrace{(16+16+\ldots+16)}_{?\ \text{termeni}}$.

Cîţi termeni are fiecare sumă? (din cele două paranteze). Vor fi atîţia termeni cîte numere sînt de la 26 pînă la 255 inclusiv, adică $255-25=230$ termeni. Scoţînd în factor comun obţinem:

$39\cdot(26+27+28+\ldots+254+255)+16\times230=39\cdot(26+255)\cdot230:2+$ $+16\cdot230=1\ 236\ 965$.

313. Pe scurt: $\overline{aba}:15=q$, rest $6\Rightarrow\overline{aba}=15q+6$. La înmulțire, un număr terminat în **5** poate da un produs terminat în **0** sau în **5**. Atunci: $\overline{aba}=\overline{\cdot\cdot0}+6=\overline{\cdot\cdot6}$ sau $\overline{aba}=\overline{\cdot\cdot5}+6=\overline{\cdot\cdot1}$. Rezultă: $\overline{aba}\in\{\overline{6b6},\overline{1b1}\}$. Scriind sistematic numerele obținute, rezultă: $\overline{6b6}=600+10b+6$ și $\overline{1b1}=100+10b+1$, iar $(600+10b+6):15=q$, rest **6** și $(100+10b+1):15=q$, rest **6**. În primul caz, împărțim pe rînd fiecare termen al sumei la **15**, adică: $600:15=40$; $(10b+6):15=d$, rest **6**. Rezultă că $10b$ se împarte exact la **15**, restul **6** fiind deja obținut. Deci $10b\in\{30,60,90\}$; $b\in\{3,6,9\}$, iar $\overline{6b6}\in\{636,666,696\}$. În al doilea caz, la împărțirea cu **15**, obținem: $100:15=6$, rest **10**; $(10+10b+1):15=n$, rest $6\Leftrightarrow(10b+11):15=n$, rest $6\Leftrightarrow10b+(11-6)=15n\Leftrightarrow10b+5=15n\Rightarrow$ $b\in\{1,4,7\}$, iar $\overline{1b1}\in\{111,141,171\}$.

314. $142:b=q$, rest $10\Rightarrow142-10=bq$, în care $10<b<q$. Deoarece $132=11\cdot12$, rezultă $b=11$, $q=12$ iar împărțirea este $142:11=12$, rest **10**.

315. Din $4a\cdot2b=224\Rightarrow a\cdot b=224:8\Leftrightarrow a\cdot b=28/\times2\Rightarrow2a\cdot b=56$. În loc de $2a$ punem $b+1$ și rezultă $(b+1)\cdot b=56$. Se observă că am obținut două numere consecutive ce au produsul **56**, adică $8\times7=56$. Rezultă $b=7$, iar $a=28:7\Rightarrow a=4$.

316. $a+b+c=24$, fiecare termen este multiplu de **4**, iar $a=(b+c):2$. Fiind o sumă mică, soluțiile se pot găsi și oral. În cazul în care suma este mai mare (spre exemplu **54**), este nevoie de un raționament mai economic, astfel: deoarece $a=(b+c):2\Rightarrow b+c=2a$. Înlocuind în sumă **24**, obținem: $a+2a=24\Leftrightarrow3a=24\Rightarrow a=8$. Deci $b+c=24-8\Leftrightarrow b+c=16$. Deoarece $b\neq c\neq a$, iar $b=M_4$ și $c=M_4$, soluțiile sînt $b=4$, $c=12$ sau $c=12$, $b=4$.

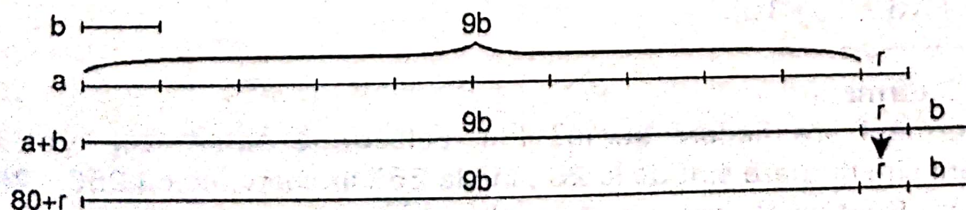
317. Fie a și b cele două numere.

<u>Rezolvarea 1</u>

Putem scrie: $a:b=9$, rest $r\Rightarrow a=9b+r$ și $r+80=a+b$. Ultima egalitate devine: $r+80=9b+r+b\Leftrightarrow r+80=10b+r/-r\Leftrightarrow80=10b\Rightarrow b=8$, iar $6<r<8\Rightarrow r=7$. Atunci $a=9\times8+7\Leftrightarrow a=79$ sau: $a=(7+80)-8\Rightarrow a=79$.

<u>Rezolvarea 2</u>

Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă $10b=80 \Rightarrow b=8$. Deoarece $6<r<8 \Rightarrow r=7$, iar $a=9\times 8+7=79$.

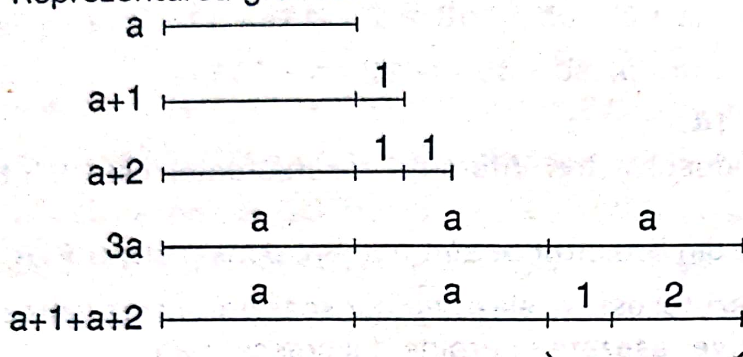
318. Fie a primul număr; celelalte două sînt $a+1$ și $a+2$.

<u>Rezolvarea 1</u>

Din enunț rezultă: $a+1+a+2=3a \Leftrightarrow 2a+3=3a \Rightarrow a=3$; celelalte două numere sînt **4** și **5**.

<u>Rezolvarea 2</u>

Reprezentarea grafică:



Din desen rezultă că $a=1+2 \Leftrightarrow a=3$; $a+1=3+1 \Leftrightarrow a+1=4$; $a+2=3+2 \Leftrightarrow a+2=5$.

319. Din enunț rezultă:

– cantitatea strînsă de un băiat este mai mare decît cea strînsă de o fată;

– cantitatea de fructe culese de băieți este reprezentată de un număr terminat în zero, adică $10x$, iar cea culeasă de fete este un multiplu de 11, adică $11y$. Deci: $10x+11y=272$, în care $10x=\overline{\cdot\cdot 0}$, iar $272=\overline{\cdot\cdot 2}$. Rezultă $11y=\overline{\cdot\cdot 2}$, deci $y\in\{2,12\}$. Dacă $y=2$, atunci $10x=272-2\times$ $\times 11=250$, iar $250-22=228$; dacă $y=12$, atunci $10x=272-12\times 11=$ $=140$, iar $140-132=8$.

320. Dacă fiecare dintre cei patru prieteni s-a născut după anul **1901**, anul de naștere al fiecăruia este un număr de forma $\overline{19ab}$.

a) Vîrstă lui Alin poate fi notată $\overline{ab}$. Rezultă: $\overline{19ab}+\overline{ab}=1960 \Rightarrow \overline{ab}+\overline{ab}=$ $=60 \Rightarrow 2\cdot\overline{ab}=60 \Rightarrow \overline{ab}=60:2 \Rightarrow \overline{ab}=30$; $\overline{19ab}=1930$.

b) Vîrsta lui Barbu poate fi notată $2\cdot\overline{ab}$. Rezultă $\overline{19ab}+2\cdot\overline{ab}=1960 \Rightarrow$ $\overline{ab}+2\cdot\overline{ab}=60 \Rightarrow 3\cdot\overline{ab}=60 \Rightarrow \overline{ab}=60:3 \Leftrightarrow \overline{ab}=20$; $\overline{19ab}=1920$.

c) Vîrsta lui Costel poate fi notată $3\cdot\overline{ab}$.

Rezultă: $\overline{19ab}+3\cdot\overline{ab}=1960 \Rightarrow 4\cdot\overline{ab}=60 \Rightarrow \overline{ab}=60:4 \Leftrightarrow \overline{ab}=15$; $\overline{19ab}=1915$.

d) Vîrsta lui Didel poate fi notată $4\cdot\overline{ab}$.

Rezultă: $\overline{19ab}+3\cdot\overline{ab}=1960 \Rightarrow 5\cdot\overline{ab}=60 \Rightarrow \overline{ab}=60:5 \Rightarrow \overline{ab}=12$; $\overline{19ab}=$ $=1912$. Deci anii de naștere ai celor patru prieteni sînt: **1930, 1920, 1915** și **1912**.

321. Notăm cu $\overline{19ab}$ anul de naștere al fiecăruia. Din enunț rezultă $\overline{19ab}+2(1+9+a+b)=1971 \Leftrightarrow 1900+10a+b+2+18+2a+2b=1971 \Leftrightarrow$ $1920+12a+3b=1971/-1920 \Leftrightarrow 12a+3b=51/:3 \Leftrightarrow 4a+b=17$.
Rezultă $(a,b)\in\{(4,1),\ (3,5),\ (2,9)\}$.
Anii de naștere sînt: 1941, 1935 și 1929, iar vîrstele: 30 ani, 36 ani și 42 ani.

322. Scriind sistematic deîmpărțitul, obținem:
$2\times(10a+b+10b+a)\ :\ (a+b)\cdot\cdot\overline{ab}=308 \Leftrightarrow 2\times(11a+11b)\ :\ (a+b)\cdot\overline{ab}=$
$=308 \Leftrightarrow 2\cdot11\cdot(a+b)\ :\ :\ (a+b)\cdot\overline{ab}=308 \Leftrightarrow 22\cdot\overline{ab}=308 \Rightarrow$
$\overline{ab}=308\ :\ 22 \Leftrightarrow \overline{ab}=14$.

323. a) Se observă că produsul a trei diferențe (neefectuate) este $6\cdot7\cdot5$. Ce informații mai avem?
Rezultatul este format din 3 factori ce sînt numere consecutive: 5, 6, 7. În fiecare diferență descăzutul este același, $\overline{ab}$, iar scăzătorul este reprezentat prin numere consecutive, așezate în ordine descrescătoare.
Dacă descăzutul este același, diferența este mai mare atunci cînd scăzătorul este mai mic.
Deci cei trei factori (care nu se împart exact între ei, sînt numere prime) constituie rezultate astfel: $\overline{ab}-7=5$; $\overline{ab}-6=6$; $\overline{ab}-5=7$.
Rezultă $\overline{ab}=12$.
b) Rezultatul este format din 2 factori, numere consecutive; în prima parte a egalității sînt 3 diferențe neefectuate, deci vor fi 3 factori. Deducem că $3\cdot2=3\cdot2\cdot1$, iar $\overline{ab}-11=1$; $\overline{ab}-10=2$, $\overline{ab}-9=3$. Rezultă $\overline{ab}=12$.
c) Se observă că sînt 3 factori (căci în primul membru al egalității sînt 3 diferențe neefectuate) care au produsul 60. Puteți spune care este cel mai mic și cel mai mare factor? Da, deoarece descăzutul este același, numai scăzătorul este diferit. $\overline{ab}-18<\overline{ab}-16$. Cu cît? Cu 2, căci $18-16=2$.
Deci sînt 3 numere consecutive care au produsul 60. Aceste numere sînt: 3, 4, 5. Rezultă $\overline{ab}-18=3$, $\overline{ab}-17=4$ și $\overline{ab}-16=5$, iar $\overline{ab}=18+3 \Leftrightarrow$ $\overline{ab}=21$ sau $\overline{ab}=17+4=21$ sau $\overline{ab}=16+5 \Leftrightarrow \overline{ab}=21$.

324. Dacă produsul este 156, rezultă că numerele sînt mai mari decît 10, căci $10\times10=100$, sînt mai mici decît 20, căci $20\times20=400$.
Dintre numerele consecutive, au produsul terminat în 6 cele de forma $\overline{\cdot 2}$ și $\overline{\cdot 3}$ sau $\overline{\cdot 7}$ și $\overline{\cdot 8}$.
Fiind numere cuprinse între 10 și 20, unica soluție este $12\times13=156$, căci $17\times18>156$.
Soluție pentru elevii din clasa a V-a:
$156=2^2\cdot3\cdot13=4\cdot3\cdot13=12\cdot13$.

325. Fie $\overline{ab}$ numărul căutat. Din $(\overline{ab}+5):6=(\overline{ab}-6):5$. Deoarece $d=q\times î$, rezultă $\overline{ab}+5=(\overline{ab}-6):5\times 6 \Leftrightarrow \overline{ab}+5=(\overline{ab}-6)\times 6:5 \Leftrightarrow \overline{ab}+5=$ $=(6\overline{ab}-36):5 \Leftrightarrow 6\overline{ab}-36=5\overline{ab}+25 \Leftrightarrow \overline{ab}=61$.

326. Deoarece $a:b=4$, rest $r \Rightarrow a=4b+r$, iar restul este 1, căci $a+b=11$, adică $4b+1+b=11 \Leftrightarrow 5b+1=11 \Rightarrow b=2$, $a=9$, iar $\overline{ab}=92$.
Sau: $a=4b+r \Rightarrow a+b=5b+r \Rightarrow 5b+r=11$. Rezultă $b\leq 2$; dar $r<b \Rightarrow r=1$, $b=2$, $a=11-2 \Leftrightarrow a=9$, iar $\overline{ab}=92$.

327. Cum putem obține termenii din egalitățile date folosindu-ne de termenii sumei pe care trebuie să o determinăm? Din $\overline{abcd}$ obținem: $\overline{a000}+\overline{b00}+\overline{c0}+d$. Din $\overline{efgh}$ obținem: $\overline{e000}+\overline{f00}+\overline{g0}+h$. Pentru a obține $\overline{af}+\overline{eb}$, asociem $(\overline{a000}+\overline{f00})+(\overline{e000}+\overline{b00})$ și rezultă:

$$100(10a+f)+100(10e+b)=100\,\overline{af}+100\,\overline{eb}=$$
$$=100(\underbrace{\overline{af}+\overline{eb}}_{99})=100\times 99=9\ 900.$$

Pentru a obține $\overline{ch}$ și $\overline{gd}$, asociem $(\overline{c0}+h)+(\overline{g0}+d)$ și rezultă $\overline{ch}+\overline{gd}=99$.
Deci $\overline{abcd}+\overline{efgh}=9\ 900+99=9\ 999$.

328. Scriind sistematic numerele date, obținem:
$1\ 111a+111b+11c+d=2\ 167$, din care rezultă $a=1$ (căci dacă $a\geq 2$ rezultă că un termen, $1\ 111a$, este mai mare decît suma, ceea ce este fals). Atunci $111b+11c+d=2\ 167-1\ 111=1\ 056$. Deoarece valoarea maximă a termenului $\overline{cc}$ poate fi 99, rezultă că b trebuie să ia valorarea maximă, adică 9, iar $11c+d=1\ 056-999=57$. Dacă $c+d=7$, rezultă $c=5$, $d=2$, iar $\overline{abcd}=1\ 952$. Atunci $1\ 952:1\ 952=1$.

Observație: Scrierea sistematică mai poate fi: $\overline{aaaa}+\overline{bbb}+\overline{cc}+d=2\ 167$.

329. $1010a+101b-1\ 010b-101a=909 \Leftrightarrow 909a-909b=909 \Leftrightarrow 909\cdot(a-b)=$ $=909/:909 \Rightarrow a-b=1$. Rezultă că
$(a,b)\in\{(9,8),(8,7),(7,6),(6,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1)\}$, iar
$(\overline{abab}:101)\in\{98,87,76,65,54,43,32,21\}$.
Într-o altă variantă putem scrie: $\overline{abab}-\overline{baba}=101\overline{ab}-101\overline{ba}=101(\overline{ab}-\overline{ba})$; $101(\overline{ab}-\overline{ba})=909 \Rightarrow \overline{ab}-\overline{ba}=9 \Rightarrow a-b=1$. (În continuare aceeași rezolvare).

330. $1000a+100b+10c+d-100a-10b-c-10a-b=1\ 264 \Leftrightarrow 890a+89b+$ $+9c=1\ 264$. Se observă că $890a\leq 1\ 264 \Rightarrow a=1$.
Deci $89b+9c=1\ 264-890 \Leftrightarrow 89b+9c=374$. Atunci $89b\leq 374 \Rightarrow$ $b\leq 374:89 \Rightarrow b\leq 4$. Dacă $b=4$, atunci $9c=374-89\times 4 \Leftrightarrow$ $9c=374-356 \Leftrightarrow 9c=18 \Rightarrow c=2$. Pentru $b<4$ se obțin pentru c valori mai

mari decît 10, ceea ce nu convine. Deoarece $\overline{142d}-(142+14+d)=$ $=1\ 264 \Leftrightarrow 1\ 420+d-156-d=1\ 264$, rezultă $d\in\{0,1,2,\ldots,9\}$.

Deci $1\ 248 : 16=78$ (rest 0), iar $\overline{abcd}=1\ 248$.

331. Scriind sistematic numerele, obținem: $7\times 111a=1\ 000c+111a-c \Leftrightarrow$ $7\cdot 111a=111a+999c/ : 111 \Rightarrow 7a=a+9c/-a \Rightarrow 6a=9c/ : 3 \Rightarrow 2a=3c$. Se observă că produsul din fiecare membru este multiplu de (se împarte exact la) 2 și 3. Deoarece a și c sînt cifre, produsul poate fi: 6; 12; 18.

Rezultă: $(a,c)\in\{(3,2),(6,4),(9,6)\}$, iar rezultatele împărțirii lui $\overline{ac}$ la 32 sînt: 1; 2; 3.

332. Prima împărțire din enunț poate fi scrisă: $\overline{xyzut}=4\cdot\overline{utzyx}$. Dacă produsul este tot un număr de 5 cifre, rezultă $4\cdot u<10$, deci u poate fi 1 sau 2. Dar $4\cdot x\neq\overline{\cdot\cdot 1}$, rezultă $u=2$, iar $x=8$. Pînă aici avem: $4\cdot\overline{2tzy8}=\overline{8yzt2}$. (Puteți aranja numerele unele sub altele). Deoarece $4\cdot t=y$, rezultă $4\cdot t<10$, rezultă $t\in\{0,1,2\}$. Dar $u\neq t$, deci $t\neq 2$ (din enunț). Rezultă $t\in\{0,1\}$. Din $4y+3=\overline{.t} \Rightarrow 4y+3=\overline{.0}$ sau $\overline{.1}$. Rezultă: $4y=\overline{.0}-3=\overline{.7}$ (fals) și $4y=\overline{.1}-3=\overline{.8}$; atunci $y=7$, căci $y\neq u$, deci $y\neq 2$. Rezultă $t=1$, $y=7$. Deoarece $4\cdot z+3=\overline{3z}$, rezultă $z=9$, iar $21\ 978\times 4=87\ 912$. Atunci: $(21\ 978+$ $+87\ 912) : 10\ 989=109\ 890 : 10\ 989=10$.

333. 1) Din enunț rezultă următoarea împărțire:

$\overline{abcd} : \overline{ab} = \overline{10}$
$\overline{ab}$
$==\overline{cd}$ (împărțirea nu este terminată)

Fiind o împărțire exactă, rezultă că $\overline{cd} : \overline{ab}=q$ (fără rest), adică $\overline{cd}=M\overline{ab}$. Fiind cifre distincte, $\overline{cd}\neq\overline{ab}$. Pentru $\overline{abcd}$ minim, $\overline{cd}=2\cdot\overline{ab}$. Pentru ca $a\neq b\neq c\neq d$, $\overline{ab}\in\{10,11,12\}$, căci $10\times 2=20$, $(0=0)$; $11=\overline{aa}\neq\overline{ab}$;

$\overline{ab}$ $\overline{cd}$
↓ ↓

$12\times 2=24$ $(b\neq c)$. Rezultă $\overline{ab}=13$, $\overline{cd}=26$, iar $1\ 326 : 13=102$, deci $\overline{abcd}=1\ 326$.

2) $\overline{abcd} : \overline{cd}=q_2$, în care $\overline{ab}<\overline{cd}$. Singura soluție: $\overline{abcd}=1\ 025$, căci $1\ 025 : 25=41$.

334. Din enunț rezultă că: $\overline{abcd}\times 4=\overline{dcba}$. Deoarece prin înmulțire obținem tot un număr de 4 cifre, rezultă că $a\leq 2$ (dacă ar fi 3, atunci am obține un număr de 5 cifre). Dar $d\times 4=\overline{\ldots a} \Rightarrow d\times 4=\overline{\ldots 1}$ sau $d\times 4=\overline{\ldots 2}$. Rezultă numai $a=2$. Deci $\overline{2bcd}\times 4=\overline{dcb2}$. Deoarece $d\times 4=\overline{\ldots 2}$, rezultă $d\in\{3,8\}$. Însă $a\times 4\leq d$. Evident $a\times 4\leq 8$, deci $d=8$. Pînă aici avem: $\overline{2bc8}\times=\overline{8cb2}$. Se observă că $4\cdot b<10$ (adică nu avem cifră de transport, căci $4\cdot 2=8$).

Deci $b\in\{1,2\}$. Dacă $b=1$, rezultă $\overline{21c8}\times4=\overline{8c12}$. Se observă că $4\cdot c+3=\overline{..1}$, deci $c\in\{2,7\}$; dacă $c=2$, rezultă $2\ 128\times4=8\ 512$, dar $1\neq5$. Dacă $c=7$, rezultă $2\ 178\times4=8\ 712$. Dacă $b=2$, rezultă $\overline{22c8}\times=\overline{8c22}$ iar $4c+3=\overline{..2}$, ceea ce este fals, căci la adunarea unui număr par cu un număr impar nu obținem un număr par. Deci $\overline{dcba}:\overline{abcd}=4 \Leftrightarrow 8\ 712:2\ 178=4$.

335. Scriind sistematic, (interesîndu-ne cîtul $\overline{yz}$), obținem: $(100x+\overline{yz}):3=\overline{yz}$, restul fiind x, $\Leftrightarrow$ $100x+\overline{yz}=3\cdot\overline{yz}+x/-x \Leftrightarrow$ $99x+\overline{yz}=3\cdot\overline{yz}/-\overline{yz} \Leftrightarrow$

$99x=2\cdot\overline{yz}$ $\Rightarrow x=2$, iar $\overline{yz}=99$, deci $\overline{xyz}=299$.

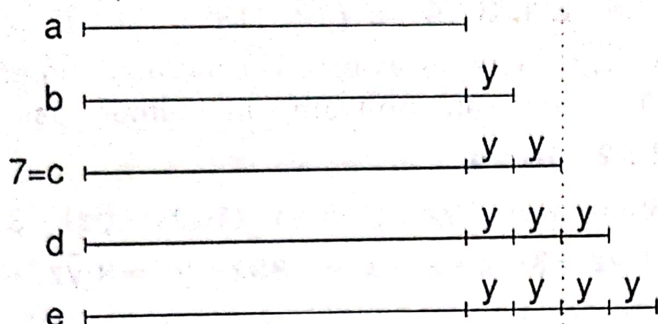
336. $100a+10b+c=5(100c+10b+a)+36 \Leftrightarrow 95a=499c+40b+36$. Deoarece $95a\leq95\cdot9 \Rightarrow$ $499c=499 \Rightarrow$ $c=1$. Deci: $95a=40b+499+36 \Leftrightarrow$ $95a=$ $=40b+535$. Se observă că $5<a<10$, iar dacă $40b+535=\overline{..5}$, rezultă $95a=\overline{..5} \Rightarrow a\in\{9,7\}$. Dacă $a=9$, rezultă $95\cdot9=40b+535 \Rightarrow b=(855-$ $-535):40 \Leftrightarrow b=8$. Dacă $a=7$, rezultă $95\times7=40b+535 \Rightarrow b\notin\mathbf{N}$ (fals). Deci $\overline{abc}=981$.

337. Ce informații avem? Fiecare factor este de forma $\overline{abc}$ sau $\overline{xyz}$. Dacă primul factor este $\overline{abc}$, elevul a transcris $\overline{abc}-111$. În enunț avem: $\overline{abc}\cdot$ $\cdot\overline{xyz}=28\ 782$, dar elevul a rezolvat: $(\overline{abc}-111)\cdot\overline{xyz}=15\ 129$. Aplicînd distributivitatea înmulțirii față de scădere obținem: $\overline{abc}\cdot\overline{xyz}-111\cdot\overline{xyz}=$ $=15\ 129 \Leftrightarrow 28\ 782-111\cdot\overline{xyz}=15\ 129 \Rightarrow 111\cdot\overline{xyz}=28\ 782-15\ 129 \Leftrightarrow$ $111\cdot\overline{xyz}=13\ 653 \Rightarrow \overline{xyz}=13\ 653:111 \Leftrightarrow \overline{xyz}=123$. Dacă $\overline{xyz}=123$, iar $\overline{abc}\cdot123=28\ 782 \Rightarrow \overline{abc}=28\ 782:123 \Leftrightarrow \overline{abc}=234$. Într-o altă variantă de lucru, primul factor, transcris de elev, s-ar putea nota astfel: $\overline{(a-1)(b-1)(c-1)}$. Scriindu-l sistematic obținem: $[100(a-1)+10(b-1)+$ $+(c-1)]\cdot\overline{xyz}=15\ 129 \Leftrightarrow (100a-100+10b-10+c-1\}\cdot\overline{xyz}=15\ 129 \Leftrightarrow$ $[(100a+10b+c)-(100+10+1)]\cdot\overline{xyz}=15\ 129 \Leftrightarrow$ $(\overline{abc}-111)\cdot\overline{xyz}=$ $=15\ 129$. (în continuare este aceeași rezolvare).

338. Din enunț rezultă: $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=1\ 288 \Leftrightarrow \overline{ab}\cdot(10c+d)=1\ 288$. Elevul a transcris astfel: $\overline{ab}\cdot[(10c+10)+(d-1)]=1\ 495 \Leftrightarrow \overline{ab}\cdot(10c+d+9)=1\ 495 \Leftrightarrow$ $\overline{ab}(\overline{cd}+9)=\overline{ab}\cdot\overline{cd}+9\cdot\overline{ab}=1\ 495 \Leftrightarrow$ $1\ 288+9\cdot\overline{ab}=1\ 495 \Leftrightarrow$ $9\cdot\overline{ab}=$ $=1\ 495-1\ 288 \Leftrightarrow$ $9\cdot\overline{ab}=207 \Leftrightarrow$ $\overline{ab}=23$. Deoarece $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=1\ 288 \Rightarrow$ $23\times\overline{cd}=1\ 288 \Rightarrow \overline{cd}=1\ 288:23 \Leftrightarrow \overline{cd}=56$.

339. Fie cele 5 numere naturale a, b, c, d și, respectiv, e. Notăm cu y diferența dată.

a) O reprezentare grafică a celor 5 numere poate fi următoarea:



Dacă transferăm $2y$ de la e la a și y de la d la b, obținem 5 părți, fiecare egală cu al treilea număr.
Deci suma celor 5 numere este $5\times 7=35$.

b) Dacă $a+y=b$, iar $a+2y=c \Rightarrow a+2y=7$. Deoarece $2y$ este un număr par, iar suma 7 este un număr impar, rezultă că a este un număr impar mai mic decît 7, adică $a\in\{1,3,5\}$. Dacă $a=1$, atunci: $1+2y=7 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=3$; deci $b=1+3=4$; $c=4+3=7$; $d=7+3=10$; $e=10+3=13$. Dacă $a=3$, atunci $3+2y=7 \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2$; deci $b=3+2=5$; $c=5+2=7$; $d=7+2=9$; $e=9+2=11$. Dacă $a=5$, atunci $5+2y=7 \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1$; deci $b=5+1=6$; $c=6+1=7$; $d=7+1=8$; $e=8+1=9$. Sau: Pe baza desenului, suma 35 se poate exprima astfel: $5a+10y=35$. $10y=M_{10}$ mai mic decît 35, căci $5a\neq 0$. Deci $10y\in\{10,20,30\}$. Dacă $10y=10 \Rightarrow y=1$, iar $5a=35-10 \Leftrightarrow 5a=25 \Rightarrow a=5, b=6, c=7, d=8, e=9$. Dacă $10y=20 \Rightarrow y=2$, iar $5a=15 \Rightarrow a=3$. Atunci $b=3+2 \Leftrightarrow b=5$; $c=5+2 \Leftrightarrow c=7$; $d=7+2 \Leftrightarrow d=9$; $e=9+2 \Leftrightarrow e=11$. Dacă $10y=30 \Rightarrow y=3$, iar $5a=5 \Leftrightarrow a=1$. Atunci $b=1+3 \Leftrightarrow b=4$; $c=4+3 \Leftrightarrow c=7$; $d=7+3 \Leftrightarrow d=10$; $e=10+3 \Leftrightarrow e=13$.

340. Dacă numărul este de 2 cifre, el are forma $\overline{ab}$. Atunci: $10a+b+10a+b=$
$=182 \Rightarrow 20a+2b=182/:2 \Rightarrow 10a+b=91 \Rightarrow \overline{ab}=91$.

Dacă numărul este de 3 cifre, el are forma $\overline{abc}$. Atunci: $100a+20b+2c=182 \Rightarrow a=1$, iar $20b+2c=82/:2 \Leftrightarrow 10b+c=41$, $\overline{bc}=41$, iar $\overline{abc}=141$. Sînt două soluții: 91 și 141.

341. a) $6+b=\overline{.3} \Rightarrow b=7$; $a+6+1=\overline{.5} \Rightarrow a=8$; $2+1=c \Rightarrow c=3$; Deci $286+$
$+67=353$.

b) $b+7=\overline{.0} \Rightarrow b=3$; $1+9+c=\overline{.4} \Rightarrow c=4$; $a+1=6 \Rightarrow a=5$; Deci $593+$
$+47=640$.

c) $\overline{1b}-7=5 \Rightarrow b=2$; $a-1-3=6 \Rightarrow a=0$; $4-1-c=d \Rightarrow 3-c=d$; dacă $c=1 \Rightarrow d=2$; dacă $c=2 \Rightarrow d=1$. Deci $402-137=265$ sau $402-237=165$.

d) $\overline{1b}-6=5 \Rightarrow b=1$; $(8-1)-c=8 \Rightarrow 17-c=8 \Rightarrow c=9$; $a-1-5=0 \Rightarrow a-6=0 \Rightarrow a=6$. Deci $681-596=85$.

e) $15-c=9 \Rightarrow c=6$; $\overline{1a}-1-2=8 \Rightarrow a=1$; $b-1-f=0 \Rightarrow b-(1+f)=0 \Rightarrow b>f$ cu 1. Atunci: $(b,f)\in\{(9,8),(8,7),(7,6),\ldots (1,0\}$. $11-2=d \Rightarrow d=9$; $7-1=e \Rightarrow e=6$. O soluție: $71\,615-2\,526=69\,089$.

f) $11-e=9 \Rightarrow e=2$; $\overline{1a}-1-9=0 \Rightarrow a=0$; $12-1-d=8 \Rightarrow d=3$; $10-1-c=0 \Rightarrow c=9$; $6-1-b=0 \Rightarrow 5=b \Rightarrow b=5$. Deci $60\,201-59\,392=809$.

g) Dacă suma începe cu 8, rezultă că U poate fi 8 sau 7 (dacă avem cifră de transport). Verifică numai $U=7$. Deci: $\overline{7N7}+\overline{7N}+7=872$. Din $7+\overline{.N}+7=\overline{.2} \Rightarrow N=8$, căci $14+8=22$. Deci adunarea este: $787+78+7=872$. Sau: Dacă scriem sistematic termenii adunării, obținem: $102U+11N=802$, în care $U<8$, iar $N>7$; deoarece $11N$ este număr par, rezultă $N=8$, iar $102U=802-11\cdot 8 \Rightarrow N=714:102 \Rightarrow N=7$.

h) Din $2U+N=\overline{.N}$ rezultă $2U=\overline{.0} \Rightarrow U=5$. Din $10+N=\overline{1N}$ și din $N+5+1=15 \Rightarrow N+9$, iar adunarea este: $595+59+5=659$. Sau: $112U+11N=600+10U+N \Leftrightarrow 102U+10N=600$. Deoarece $600=\overline{..0}$, iar $10N=\overline{.0} \Rightarrow 102U=\overline{..0} \Rightarrow U=5$, iar $10N=600-510 \Rightarrow N=9$.

i) Din $A+A+N=A \Rightarrow A=1$, iar $N=9$. Din $D+9+1+1=19 \Rightarrow D=8$. Din $1+8+1=\overline{.I} \Rightarrow I=0$. Din $S+1=8 \Rightarrow S=7$. Adunarea este: $71\,981+8191+19=80\,191$.

j) Deci $4\cdot\overline{PLUS}=\overline{3P*04}$. Avem $4\cdot P=\overline{3P}$ numai dacă P este 8 sau 9 și dacă $4\cdot L>30$, adică $4\cdot 8+6=38$ sau $4\cdot 9+3=39$. Deoarece $4\cdot L<60$, rezultă că $P\neq 8$, deci $P=9$. Dacă $4S=\overline{.4}$, rezultă $4\times 1=4$ sau $4\times 6=24$. Dacă $S=1$ și $4U=\overline{.0}$, rezultă $U=5$. Dacă $S=6$, rezultă $4\cdot U+2=\overline{.0}$, adică $U\in\{2,7\}$. Atunci $4\cdot L+1=\overline{3*}$ (căci $4\cdot P=\overline{3P}$ și $P=9$; deci $39=36+3$). Rezultă $L\in\{7,8,9\}$. Numerele sînt: 9 851; 9 826; 9 876; 9 926; 9 976; 9 776.

k) Din $5\cdot E=\overline{.5}$, rezultă $E\neq 0$, iar $R+R\neq 6$, ci $R+R>10$, adică $R+R=\overline{.6}$; din $E+1=\overline{.0}$, rezultă $E=9$, iar $P=8$. Din $4\cdot L+4=\overline{.8}$, rezultă $4\cdot L=\overline{.4}$, deci L poate fi 1 sau 6. Deoarece $3\cdot 9=\overline{.9}$, rezultă $L\neq 1$, ci $L=6$; atunci $2\cdot R+2=\overline{.6}$, rezultă $2\cdot R=14$, deci $R=7$. Adunarea este: $897\,969+7\,969+969+69+9=906\,985$.

l) $11a+20+b=\overline{ccc}$. Deoarece $a<10$, $b<10$, suma nu poate fi decît 111. Rezultă deci $11a+b=111-20 \Leftrightarrow 11a+b=91$. Deoarece $b<10$, rezultă $9>a>7$, deci $a=8$, adică $88+b=91$, iar $b=3$. Adunarea este $88+23=111$.

m) $11a+2\cdot b=\overline{ccc}$, adică $b<10$, iar $\overline{ccc}=111$. Deoarece $11a$ este număr impar cel puțin egal cu 81, rezultă $a=9$, iar $b=6$. Adunarea este $99+2\times 6=111$.

n) $111a : b=11b+c \Leftrightarrow 111a=b(10b+c) \Leftrightarrow 3\cdot 37=b(10b+c)$. Deoarece $b<10$, pentru a exista egalitatea, rezultă $b=3$, iar $37a=10\cdot 3+c \Leftrightarrow 37a=30+c$. Deci $a=1$, $b=3$, iar $c=7$. Împărțirea este: $111 : 3=37$.

342. $n=\overline{2a7b}+\overline{51c6}=\overline{8d94}$. Se observă că $b=8$, $c=1$, iar $a=9$, căci $2+5+1=8$. Deci $2\ 978+5\ 116=8\ 094$.

343. 1) Ultima cifră a primului produs parțial este 4, deci $b\in\{4,9\}$, căci $6\times 4=\overline{.4}$, iar $6\times 9=\overline{.4}$. Dacă $b=4$, atunci avem $36\times 4=144$. Dacă prima cifră a produsului este 1, rezultă $\overline{a4}\leq 1\ 944 : 36 \Leftrightarrow \overline{a4}\leq 55$, iar $\overline{a4}\geq 1\ 004 : 36 \Leftrightarrow \overline{a4}>27$. Deci $\overline{a4}\in\{34,44,54\}$, iar $36\times 34=1\ 224$; $36\times 44=1\ 584$; $36\times 54=1\ 994$. Dacă $b=9$, atunci avem $36\times 9=324$. Deci $\overline{a9}\leq 1\ 994 : 36 \Rightarrow \overline{a9}\leq 55$, iar $\overline{a9}\geq 1\ 004 : 36 \Rightarrow \overline{a9}>27$. Deci $\overline{a9}\in\{29,39,49\}$, iar $36\times 29=1\ 044$; $36\times 39=1\ 404$; $36\times 49=1\ 764$.

2) Din $2\cdot\overline{ab}=\overline{7*} \Rightarrow 2\cdot b\geq 10$, iar $a=3$. Din $\overline{3b}\cdot c=\overline{*0*} \Rightarrow c\cdot b>10$, iar $c=3$. Din $10<3\cdot b<20$ (căci $7+*=\overline{1*}$) și din $2\cdot b\geq 10$, rezultă $b\in\{5,6\}$. Înmulțirile sînt: $35\times 32=1\ 120$; $36\times 321=1\ 152$.

3) Deoarece ultima cifră a celui de-al doilea produs parțial este scrisă pe locul sutelor, rezultă că litera O notează cifra zero. Din $V\cdot\overline{NOI}=\overline{***}$, rezultă $V\cdot N<10$. Deoarece literele diferite notează cifre diferite, rezultă:

a) $T\neq 0$, căci $O=0$;

b) $I\cdot I>10$ (pentru că $T\neq 0$);

c) $I\cdot N>10$ (la înmulțirea lor obținem un număr de două cifre la primul produs parțial);

d) $(V,N)\in\{(3,2),(2,3),(4,2),(2,4)\}$.

Pentru cifre distincte, verifică numai $309\times 209=64\ 581$.

4) Deoarece $3b=\overline{.1} \Rightarrow b=7$. Din $d\times 7=\overline{.3} \Rightarrow d=9$. Din $9\times a+6=\overline{.0} \Rightarrow 9\times a=\overline{.4} \Rightarrow a=6$. Pînă aici avem $567\times\overline{c39}$. Din $567\times c=\overline{***}$, un număr de 3 cifre, rezultă $c=1$. Înmulțirea dată este $567\times 139=78\ 813$.

5) Termenii constituie produse parțiale la înmulțirea dată. Pe baza algoritmului înmulțirii a două numere naturale, din enunț deducem: dacă la înmulțirea lui $\overline{abcde}$ cu u se obține $95\ 173$, tot un număr de cinci cifre, rezultă $u\cdot a\leq 9$, care împreună cu $u\times e=\overline{.3}$, duce la concluzia că $(u,e)\in\{(1,3),(3,1)\}$. Din $t\times e=\overline{.1}$ și din $1+?=10$, rezultă $e=3$, $u=1$, iar $\overline{abcde}=95\ 713$. Atunci $95\ 713\times 1\ 531=95\ 713+2\ 871\ 390+47\ 856\ 500+95\ 713\ 000=146\ 536\ 603$.

6) Putem așeza în scris înmulțirea. Dacă $3\cdot a=\overline{.5}$, rezultă $a=5$. Tot 5 va fi și ultima cifră a fiecărui produs parțial. Dacă cifra zecilor de la produsul final este 8, atunci $5+?=8$, iar $3b+1=\overline{.3}$. Deci $b=4$, iar a doua cifră a fiecărui produs parțial este 3. Dacă $5+3+?=\overline{.0}$, rezultă $3+1=\overline{.2}$, iar $c=7$. Deci $54\ 745\times 33\ 333=182\ 465\ 085$.

344. a) Se observă că $b=4$. Deoarece restul este 0, rezultă $\overline{2{\ast}6{\ast}}=2\ 968$. Din $\overline{3{\ast}64}-\overline{{\ast}9{\ast}8}=296$, rezultă $\overline{{\ast}9{\ast}8}=2\ 968$, iar $\overline{3{\ast}64}=3\ 264$. Din $\overline{6a7}-\overline{{\ast}7{\ast}}=326$, rezultă $\overline{6a7}=697$, iar $\overline{{\ast}7{\ast}}=371$. Din $1\times\overline{c7d}=371$, rezultă $\overline{c7d}=371$. Din $2\ 968 : 371=f=g$, rezultă $f=8$ și $g=8$. Împărțirea este: $69\ 748 : 371=188$.

b) Să privim „drumul" în efectuarea împărțirii în sens invers, de la sfîrșit spre început. Din $\overline{1{\ast}e}-\overline{{\ast}8e}=0$ și din $e=e$, rezultă $\overline{1{\ast}e}=\overline{18e}$. Din $\overline{9d}-\overline{{\ast}2}=18$, rezultă $d=0$, iar $\overline{{\ast}2}=90-18=72$. Din $z\times\overline{g6}=72$, rezultă $z=2$, iar $\overline{g6}=36$. Din $36\times t=\overline{18e}$, rezultă $t=5$, iar $e=0$. Din $\overline{abc}=36\times 4+9$, rezultă $\overline{abc}=153$. Împărțirea este $15\ 300 : 36=425$.

c) Din enunț rezultă că: $\overline{abcd}\times 4=\overline{dcba}$. Deoarece prin înmulțire obținem tot un număr de 4 cifre, rezultă că $a\leq 2$ (dacă ar fi mai mare, am obține un număr mai mare de cifre). Dacă $d\times 4=\overline{.a}$, rezultă $d\times 4=\overline{.1}$ sau $d\times 4=\overline{.2}$. Rezultă numai $a=2$. Deci $\overline{2bcd}\times 4=\overline{dcb2}$, iar $d\in\{3,8\}$. Dar $a\times 4\leq d$. Evident că $a\times 4\leq 8$, deci $d=8$. Pînă aici avem: $\overline{2bc8}\times 4=\overline{8cb2}$. Din $b\times 4<10$ (nu avem cifră de transport), rezultă $b\in\{1,2\}$. Dacă $b=1$, rezultă $\overline{21c8}\times 4=\overline{8c12}$. Se observă că $4\times c+3=\overline{.1}$ deci $c\in\{2,7\}$. Dacă $c=2$, rezultă $2\ 128\times 4=8\ 512$, dar $1\neq 5$; dacă $c=7$, rezultă $2\ 178\times 4=8\ 712$. (Dacă $b=2$, rezultă $\overline{22c8}\times 4=\overline{8c22}$, iar $4c+3=\overline{.2}$, ceea ce este fals, căci la adunarea unui număr par cu un număr impar obținem un număr impar, nu par.)

d) Din enunț rezultă că $\overline{abc}=2\cdot\overline{cba}+100 \Rightarrow 100a+10b+c=200c+20b+2a+100 \Leftrightarrow 98a=199c+10b+100$. Dacă $a-c=4 \Rightarrow a=c+4$, iar $98(c+4)=199c+10b+100 \Leftrightarrow 98c+392=199c+10b+100 \Leftrightarrow 292=101c+10b$. Deoarece $c\neq 0$, $c<10$, $b<10$, rezultă $c=2$, iar $292-202=10b$. Atunci $b=9$, iar $a=6$. Deci $\overline{abc}=692$. Sau: $\overline{(c+4)bc}=2\cdot\overline{cb(c+4)}+100$ și se ajunge la $292=101c+10b$. Sau: $\overline{abc}=2\cdot\overline{cba}+100 \Rightarrow$ $\overline{cba}+\overline{cba}+100=\overline{abc} \Rightarrow a+a+0=\overline{1c}$ (căci $c+c+1\leq a$). Deci $2c+8=10+c \Rightarrow c=2$, iar $a=6$. Dacă $\overline{6b2}=2\cdot\overline{2b6}+100 \Rightarrow 2\cdot 6=12$, iar $2b+1=\overline{1b}$. Unica soluție este $b=9$ și $\overline{abc} : \overline{cba}=692 : 296$.

345. Din enunţ rezultă $(\overline{ab}-\overline{ba}):ab=a-b \Rightarrow 9(a-b)=ab(a-b) \Rightarrow 9=ab$. Deoarece $a \geq b$, rezultă $(a,b) \in \{(9,1),(3,3)\}$, iar $\overline{ab} \in \{91,33\}$.

346. Rezolvarea 1

Din scrierea $\overline{abc}$ rezultă $a \neq 0$, iar din enunţ $c \neq 0$. Dacă $c=1$, atunci $b=4$, iar $a=4:2=2$ şi $\overline{abc}=241$. Dacă $c=2$, atunci $b=8$, iar $a=8:2=4$ şi $\overline{abc}=482$. Dacă $c=3$, atunci $b=12$, ceea ce nu convine.

Rezolvarea 2

Date fiind relaţiile din enunţ, cea mai mare sumă a cifrelor luate ca simple unităţi este $9+8+7=24$. Dacă $b=4c$, iar $b=2a$, rezultă $2a=4c \Leftrightarrow a=2c$ iar $2c+4c+c \leq 24 \Leftrightarrow c \leq 3$. Dacă $c=3$, $b=12$, ceea ce nu convine. Dacă $c=2$, $b=8$, $a=4$, iar $\overline{abc}=482$. Dacă $c=1$, $b=4$, $a=2$, iar $\overline{abc}=241$.

347. Din enunţ rezultă $\overline{5a}:7=q$ (rest 6) $\Leftrightarrow \overline{5a}=7q+6 \Rightarrow 7q \leq \overline{5a}-6 \Rightarrow 7q \leq$ $\leq 53 \Rightarrow q \leq 7$. Dacă $q=7$, atunci $\overline{5a}=7\times7+6=55$, iar $\overline{5a}=55$.

(Dacă $q=6$, atunci $\overline{5a} \neq 7\times6+6$).

348. Deoarece împărţitorul este 9, restul maxim poate fi 8. Atunci $\overline{7a}:9=q$ (rest 8) $\Rightarrow \overline{7a}=9q+8 \Rightarrow 9q \leq 71 \Rightarrow q \leq 7$, iar $\overline{7a}=9\times7+8 \Rightarrow \overline{7a}=71$.

349. Trebuie să descompunem pe 30 în 3 factori, dintre care unul să fie suma celorlalţi doi, adică: $30=2\cdot3\cdot(2+3)$; $30=1\cdot5\cdot(1+5)$.

350. $a\times a\times a=9a \Rightarrow a\times a=9 \Rightarrow a=3$, iar $\overline{aa}=33$.

351. Fie numărul natural a. Din enunţ rezultă: $a\cdot a:(a+a)=14 \Leftrightarrow a\cdot a=14\cdot2a \Rightarrow$ $a=14\cdot2 \Rightarrow a=28$.

352. Deoarece produsul este egal cu suma lor, rezultă că sînt numere mai mici decît 10, cu diferenţă minimă între ele. Diferenţa minimă este 1. Deci sînt numere naturale consecutive, adică 1, 2 şi 3, căci $1\cdot2\cdot3=1+2+3$. (Dacă am avea $2\cdot3\cdot4=2+3+4$, ar fi un enunţ fals. Alte numere consecutive nu convin, căci produsul devine mult mai mare faţă de sumă).

353. Din enunţ rezultă că numerele sînt diferite de zero şi sînt numere mici, iar produsul este mai mare decît 10. Deci $2\times9\times1\times1\times1\times1\times1\times1\times1=$ $=2+9+7\cdot1 \Leftrightarrow 18=18$.

354. Deoarece $10^2=10\times10$, iar $a\times a=a^2$ şi $a+a=2a$, rezultă $2a=a\times a \Leftrightarrow a=2$. Verificare: $2+2=2\times2=2^2$.

355. De exemplu: $2\cdot4+1=9=3^2$; $1\cdot3+1=4=2^2$; $4\cdot6+1=25=5^2$; $3\cdot5+1=$ $=16=4^2$ etc.

În general: $a(a+2)+1=a^2+2a+1=(a+1)^2$.

356. $y\cdot z=3\cdot5=5\cdot3$; $z\cdot x=7\cdot5=5\cdot7$, rezultă $z=5$, $y=3$. Dacă $3x=21 \Rightarrow x=7$.

357. Din enunţ rezultă:

$\overline{ab}=\overline{cd}+2=2q+2$, deci $\overline{ab}$ se împarte exact la 2;

$\overline{ab}=\overline{ef}+5=5x+5$, deci $\overline{ab}$ se împarte exact la 5;

$\overline{ab}=\overline{gh}+7=7y+7$, deci $\overline{ab}$ se împarte exact la 7.

Rezultă $\overline{ab}$ se împarte exact la 2, la 5 și la 7. Deci $\overline{ab}=70$.

358. $1\,000x+111y-1\,110y-x=111x \Leftrightarrow 999(x-y)=111x \Leftrightarrow 9x-9y=x \Rightarrow 8x-9y=0 \Rightarrow 8x=9y \Rightarrow x=9,\ y=8$.

359. Deoarece $\overline{aa}=11a$, rezultă că fiecare termen are cel mult două cifre.

1) Primul număr este de forma $\overline{b2}$, al doilea este $\overline{b2}+2$, iar $\overline{b2}+\overline{b2}+2=11a \Rightarrow 2\cdot\overline{b0}=11a-6$. Deoarece $2\cdot\overline{b0}=\overline{.0}$, rezultă $11a-6=\overline{.0}$, iar $a=6$. Atunci $\overline{b0}=30$, iar $\overline{b2}=32$ și $\overline{b2}+2=34$.

2) Primul număr este de forma $\overline{b7}$, al doilea este $\overline{b7}+5$, adică $2\cdot\overline{b0}=11a-19$. Rezultă $11a-19=\overline{.0}$, iar $a=9$, $\overline{b7}=47$; $\overline{b7}+5=52$.

360. Din enunț rezultă: $a-20=b \Rightarrow a=20+b$; $a-19=c \Rightarrow a=19+c$; $a-21=d \Rightarrow a=21+d$; $a-24=e \Rightarrow a=24+e$, iar $a=b+c+d+e$; $3a=84 \Rightarrow a=28$.

361. Pe scurt enunțul este: $3a\geq213$, în care $a<213$. Rezultă $a\geq213:3 \Rightarrow a\geq71 \Rightarrow a\in\{71,72,73,\ldots,212\}$. Cîte numere sînt? $212-70=152$ sau $213-71=152$.

362. Media trimestrială este media aritmetică a notelor primite. Cum se calculează media aritmetică? Sînt două moduri:

a) împărțim suma notelor la numărul de note, adică:

1) $(7+8+9+8):4=32:4=8$;

2) $(9+9+10+8):4=36:4=9$;

3) $(8+10+10+8):4=36:4=9$;

4) $(10+8+10+10+10):5=48:5=45:5+3:5=9+0{,}60=9{,}60$.

Deoarece sînt mai mult de 49 de sutimi de punct peste 9, după normele actuale, media trimestrială va fi 10.

b) pentru cazul 1), vedem care este nota cea mai mică (7) și cîte unități au celelalte note în plus față de 7, adică $(8-7)+(9-7)+(8-7)=1+2+1=4$. Avem deci 4 note de 7 plus 4 puncte. Împărțind cele 4 puncte la 4, obținem $7+4:4=7+1=8$. Răspuns: Dan va avea media cea mai mare.

Observație: Putem lua ca termen de comparație alt număr, cel care ni se pare mai apropiat de medie (8).

Unitățile în plus le repartizăm notelor la care unitățile sînt în minus, adică $9-1=7+1$.

363. $(70+80+48+42):4=240:4=60$ (kg).

364. Al doilea turist parcurge într-o zi media distanțelor parcurse de primul turist în cele 3 zile, adică $(100+111+95):3=306:3=102$ (km/zi).

365. Fie a celălalt număr. Rezultă: $(a+12):2=9 \Rightarrow a+12=2\times9 \Rightarrow a+12=18 \Rightarrow a=18-12 \Rightarrow a=6$.

366. Notăm numerele cu a, b și, respectiv, cu c. Rezultă $(a+b+c):3=18 \Rightarrow a+b+c=54$; $b=a+4$; $c=b+13 \Leftrightarrow c=a+4+13 \Rightarrow c=a+17$. Înlocuind în

sumă pe b și c prin a, obținem: $a+a+4+a+17=54 \Leftrightarrow 3a=54-21 \Rightarrow a=11$; $b=11+4=15$; $c=28$. Se poate utiliza și metoda grafică.

367. Din enunț rezultă că media aritmetică a primelor două numere este **21**, cea dintre primul și al treilea număr este **22**, iar cea a ultimelor două este **25**. Fie a, b și c cele trei numere naturale. Atunci: $(a+b) : 21 \Rightarrow a+b=42$; $(a+c) : 2=22 \Rightarrow a+c=44$; $(b+c) : 2=25 \Rightarrow b+c=50$. Dacă adunăm, membru cu membru, cele trei relații obținute, rezultă: $2a+2b+2c=136 \Rightarrow 2(a+b+c)=136 \Rightarrow a+b+c=68$. Dacă $a+b=42$, atunci $c=68-42=26$; dacă $a+26=44$, rezultă $a=44-26=18$; dacă $18+b=42$, rezultă $b=42-18=26$. (Pentru reprezentarea grafică este necesar să stabilim relațiile de diferență dintre numere: $c=b+(44-42)$; $b=a+(50-44)$; $a+b+c=68$ etc.).

368. Ca să arătăm că media aritmetică a numerelor date este un număr natural, trebuie să demonstrăm să suma lor se împarte exact la **3**.

a) Fie a primul număr. Atunci $a+(a+1)+(a+2)=3a+3=3(a+1)$. Se observă că acest produs are unul dintre factori **3**, deci produsul se împarte exact (este divizibil cu) la **3**. (Într-o eventuală reprezentare grafică, se poate observă că obținem **3** părți, fiecare egală cu numărul mai mic, dacă transferăm diferența **1** de la al treilea la primul număr).

b) Fie a, b și, respectiv, c cele trei numere naturale, iar d diferența dată. Atunci: $b=a+d$; $c=b+d=a+d+d=a+2d$. Suma celor trei numere este: $a+(a+d)+(a+2d)=3a+3d=3(a+d)$. Evident că suma se împarte exact la **3**.

369. Dacă Elena obține media **7** din cele trei note, rezultă că suma lor este $3\times7=21$. Deoarece notele sînt diferite și cel mult egale cu **10**, rezultă că nota cea mai mică poate fi **2**, iar suma cea mai mare a două note este $9+10=19$. Rezultă soluțiile $2+9+10$; $3+8+10$; $4+9+8$; $4+10+7$; $5+9+7$; $5+10+6$; $6+7+8$.

370. a) $1+2-3+4-5-6+7-8+9=1$;

b) $1+23-45-67+89=1$.

371. Asemenea exerciții sînt cunoscute sub numele de Jocul numerelor.

a) $1+1-1-1=0$;
$1+1-1\times1=1$;
$1 : 1+1 : 1=2$;
$1+1+1 : 1=3$;
$1+1+1+1=4$.

b) $2+2-(2+2)=0$ sau $2-2+2-2=0$;
$(2 : 2)\times(2 : 2)=1$ sau $2\times2 : 2 : 2=1$;
$2 : 2+2 : 2=2$;
$2\times2-2 : 2=3$;
$2\times2+2 : 2=4$ sau $2 : 2\times2\times2=4$;
$(2+2)+2 : 2=5$;
$2\times2\times2-2=6$ sau $2\times(2 : 2+2)=6$;

$2 \times 2 \times 2 + 2 = 10;$
$(2+2+2) \times 2 = 12.$

c) $(3+3)-(3+3)=0;$
$3-(3+3) : 3=1;$
$(3 \times 3-3) : 3=2;$
$(3+3+3) : 3=3;$
$(3 \times 3+3) : 3=4;$
$3+3-3 : 3=5$ sau $(3+3) : 3+3=5;$
$3-3+3+3=6;$
$(3+3)+3 : 3=7;$
$3 \times 3-3 : 3=8;$
$3 \times 3+3-3=9$ sau $3 \times 3 : (3 : 3)=9;$
$3 \times 3+3 : 3=10.$

d) $(4 \times 4-4) : 4=3;$
$(4+4) : 4+4=6;$
$4+4-4 : 4=7;$
$4 \times 4-(4+4)=8$ sau $4 \times 4-4-4=8;$
$4 \times 4+4+4=24;$
$4 \times 4+4 \times 4=32.$

e) $5 : 5+5 : 5=2;$
$(5+5+5) : 5=3;$
$(5-5) \times +5=5;$
$(5 \times 5+5) : 5=6;$
$(5+5) : 5+5=7;$
$5+5-5 : 5=9;$
$5 \times 5+5 : 5=26;$
$(5 : 5+5) \times 5=30.$

f) $(8+8) : (8+8)=1$ sau $(8 \times 8) : (8 \times 8)=1;$
$8 : 8+8 : 8=2;$
$8 \times 8 : (8+8)=4;$
$(8+8) : 8+8=10;$
$8+8-8 : 8=15.$

g) $(9+9) : (9+9)=1$ sau $9 \times 9 : (9 \times 9)=1;$
$9 : 9+9 : 9=2;$
$9-(9+9) : 9=7;$
$(9 \times 9-9) : 9=8;$
$9-(9-9) : 9=9;$
$(9 \times 9+9) : 9=10;$
$9 : 9+9+9=19.$

h) $(6+6) : (6+6)=1$ sau $(6+6 : 6)-6=1;$
$(6 \times 6-6) : 6=5;$
$(6-6) \times 6+6=6;$

$(6+6) : 6+6=8;$
$(6+6) : (6 : 6)=12;$
$6+6+6+6=24$ sau $6\times6-6-6=24$ sau $6\times6-(6+6)=24;$
$(6-6 : 6)\times6=30.$

i) $(7+7) : (7+7)=1$ sau $7 : 7 : (7 : 7)=1$ sau $7\times7 : (7\times7)=1;$
$(7+7+7) : 7=3;$
$(7\times7+7) : 7=8;$
$7+7-7 : 7=13;$
$7 : 7+7+7=15.$

372. a_1) $5+5+5+1+1=17;$
a_2) $5+15+15=35;$
b_1) $5+5+5+11=26;$
b_2) $5+15+5+1=26;$
b_3) $51+5+5+1=62;$
b_4) $55+5+1+1=62;$
c_1) $55+5+11=71;$
c_2) $51+15+5=71;$
c_3) $55+15+1=71.$

373. Din condiția 1) rezultă $4e=32 \Leftrightarrow e=8$. Atunci $d=8+8 \Leftrightarrow d=16;$ $16-12=c \Leftrightarrow c=4;$ $b=10;$ $a=10+10=20.$

374. Din $(a+b) : b=b$ rezultă $a+b=b\times b \Leftrightarrow a=b\times b-b \Leftrightarrow a=b(b-1)$ sau $(a+b) : b=b \Rightarrow a : b+b : b=b \Leftrightarrow a : b+1=b \Leftrightarrow a : b=b-1 \Leftrightarrow a=b(b-1)$. Deoarece b și $b-1$ sînt numere consecutive rezultă: dacă $b=2$, atunci $a=2\cdot1=2$, iar $\overline{ab}=22$; dacă $b=3$, atunci $a=3\cdot2=6$, iar $\overline{ab}=63$; dacă $b=4$, atunci $a=4\cdot3=12$, ceea ce este fals, a fiind cifră.

375. Din enunț rezultă: $\overline{db5}+(\overline{db5}+5)=\overline{aaa} \Rightarrow \overline{..5}+\overline{..5}+5=\overline{..5}$, deci $\overline{aaa}=555$. Atunci: $\overline{db0}+\overline{db0}+15=555 \Leftrightarrow \overline{db0}=540 : 2 \Rightarrow \overline{db0}=270$. Primul număr este 275, al doilea 280, iar $\overline{aaa}=555$.

376. Din enunț rezultă: $\overline{ab} : 4=a\cdot b : 2+\frac{b}{4}$ (semiprodus = jumătate din produs).

Atunci: $\overline{ab}=(a\cdot b : 2+\frac{b}{4})\times4$, căci deîmpărțitul este egal cu împărțitorul înmulțit cu cîtul. Rezultă: $\overline{ab}=a\cdot b : 2\times4+\frac{b}{4}\times4 \Leftrightarrow \overline{ab}=a\cdot b\cdot2+b \Leftrightarrow 10a+b=$ $=2ab+b \Leftrightarrow 10a=2ab$ /: $2a \Rightarrow 5=b$. Deoarece $a<10$, rezultă $a\in\{1,2,3,...$ $...9\}$, iar $\overline{ab}\in\{15,25,35,45,...,95\}$. Verificare:

1) $15 : 4=\frac{5}{2}+\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4}=\frac{15}{4};$

2) $25 : 4=10 : 2+\frac{5}{4} \Leftrightarrow 5+\frac{5}{4}=5+\frac{5}{4};$

3) $35 : 4 = 15 : 2 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{35}{4} = \frac{15}{2} + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{35}{4} = \frac{35}{4}$;

4) $45 : 4 = 20 : 2 + 5 : 4 \Leftrightarrow 10 + 5 : 4 = 10 + 5 : 4$;

5) $55 : 4 = 25 : 2 + 5 : 4 \Leftrightarrow \frac{55}{4} = \frac{25}{2} + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{55}{4} = \frac{55}{4}$;

iar $95 : 4 = 45 : 2 + 5 : 4 \Leftrightarrow \frac{95}{4} = \frac{45}{2} + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{95}{4} = \frac{95}{4}$.

377. Enunțul devine: $\overline{aa} \cdot b = ab(a+b) \Leftrightarrow 11a \cdot b = ab(a+b)$. Deoarece $a \cdot b = a \cdot b$, rezultă $11 = a + b$. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$, atunci:

– pentru clasa a IV-a: a constituie 6 părți, iar b constituie 5 asemenea părți care împreună reprezintă 11; rezultă $a = 6$, iar $b = 5$, căci $11 : 11 = 1$, iar $6 \times 1 = 6$ și $5 \times 1 = 5$; rezultă $66 \cdot 5 : (6+5) = 6 \times 5 \Leftrightarrow 30 = 30$;

– pentru clasa a V-a: dacă $\frac{a}{b} = \frac{6}{5} \Rightarrow a = \frac{6}{5}b$, iar $\frac{6}{5}b + b = 11 \Leftrightarrow \frac{11}{5}b = 11 \Rightarrow$ $b = 11 : 11 \times 5 \Rightarrow b = 5$, iar $a = \frac{6}{5} \cdot 5 \Leftrightarrow a = 6$ (egalitatea este adevărată).

378. 1) $\frac{2a}{8} = 1 \Rightarrow a = 4$; 2) $\frac{8a}{8} = 1 \Rightarrow a = 1$.

379. 1) $a = 3$; $a = 11$; 2) $a = 1$; $a = 5$; 3) $a = 1$; $a = 3$; 4) $a = 3$; $a = 24$.

CAPITOLUL II

Probleme tipice

II. Enunțuri

380. În două coșuri sînt 18 mere, în primul fiind cu 4 mai multe decît în al doilea. Cîte mere sînt în fiecare coș?

381. Două numere consecutive au suma 15. Care sînt numerele?

382. Suma a două numere consecutive pare este 18. Aflați numerele.

383. Suma a două numere consecutive impare este 20. Aflați numerele.

384. Suma a trei numere este 12. Al doilea este cu 3 mai mare decît primul, dar cu 3 mai mic decît al treilea. Care sînt numerele?

385. Un creion costă cu 4 lei mai mult decît o gumă, iar împreună costă 14 lei. Ce rest va primi Costel de la 70 de lei, dacă el cumpără 6 creioane și 3 gume?

386. Suma a trei numere este 38. Primul număr este 13. Care sînt celelalte două numere, știind că diferența acestora este 7?

387. Suma a două numere este 32. Dacă din sumă scădem diferența celor două numere obținem 8. Care sînt numerele?

388. Diferența a două numere este 8. Dacă din suma lor scădem diferența obținem 14. Care sînt numerele?

389. Dacă la suma a două numere adunăm diferența lor obținem 28, iar dacă din sumă scădem diferența obținem 16. Aflați numerele.

390. Diferența a două numere este 5. Dacă adunăm suma numerelor cu diferența lor obținem 32. Care sînt numerele?

391. Suma a două numere este 19. Dacă la sumă adunăm diferența lor obținem 26. Aflați numerele.

392. Suma a trei numere este 30. Primele două sînt egale, iar al treilea este cu 2 mai mare decît suma primelor două. Care sînt numerele?

393. Suma a cinci numere este 64. Primele două sînt consecutive impare. Următoarele trei au suma 36 și sînt consecutive pare. Aflați numerele.

394. Suma a două numere este **28**. Dacă împărțim această sumă la diferența numerelor, obținem cîtul **14**. Care sînt numerele?

395. Diferența a două numere este **8**. Dacă împărțim suma lor la diferență, obținem cîtul **4**. Aflați numerele.

396. Suma a două numere este **64**. Dacă împărțim suma la îndoitul diferenței lor obținem cîtul **4**. Care sînt numerele?

397. Suma a două numere este **36**. Dacă împărțim suma la jumătatea diferenței lor obținem cîtul **6**. Aflați numerele.

398. Diferența a două numere este **16**. Dacă împărțim suma la sfertul diferenței lor obținem **8**. Care sînt numerele?

399. Aflați cele două numere naturale, știind că diferența lor este **4**, iar la împărțirea dintre suma lor și triplul diferenței obținem **4**.

400. Aflați cele două numere naturale, știind că diferența lor este **10**, iar la împărțirea dintre suma lor mărită de **5** ori și diferența lor mărită de **4** ori obținem cîtul **2**.

401. Suma a două numere este **80**. Dacă împărțim jumătatea acestei sume la îndoitul diferenței lor obținem cîtul **2**. Care sînt numerele?

402. Aflați cele trei numere naturale, știind că, două cîte două, au suma egală respectiv cu **10**, **6** și **8**.

403. Suma a trei numere naturale este **17**. Aflați numerele, știind că suma dintre primele două este **11**, iar suma dintre ultimele două este **15**.

404. Într-o cutie sînt bile de trei culori: albe, galbene și roșii. Știind că **8** nu sînt albe, **12** nu sînt galbene, iar **10** nu sînt roșii, aflați cîte bile de fiecare fel sînt în cutie.

405. În două vaze sînt **12** flori. Dacă aș transfera două flori dintr-o vază în cealaltă, în fiecare ar fi același număr de flori. Cîte flori sînt în fiecare vază?

406. Alex, Dinu și Tibi au împreună o sumă cuprinsă între **16** lei și **20** lei. Dacă Dinu i-ar da lui Alex **4** lei și lui Tibi **6** lei, ei ar avea sume egale, reprezentate de numere naturale. Ce sumă are fiecare?

407. Pe două rafturi sînt **33** cărți. Dacă am transfera **9** cărți de pe primul raft pe celălalt, pe al doilea ar fi cu **3** cărți mai mult decît pe primul raft. Cîte cărți sînt pe fiecare raft?

408. În două teancuri sînt **39** de caiete. Dacă aș transfera **7** caiete din al doilea teanc în primul, al doilea ar avea cu **3** caiete mai mult decît ar fi în primul teanc. Cîte caiete sînt în fiecare teanc?

409. Oana, Diana și Irina au împreună **85** de lei. Dacă Oana i-ar da Irinei **6** lei, atunci Diana ar avea cu **2** lei mai mult decît Irina, dar cu **3** lei mai puțin decît Oana. Cîți lei are fiecare?

410. Să se determine cinci numere naturale a căror sumă este **996**, dacă al doilea este cu **9** mai mare decît primul, dar cu **3** mai mic decît al treilea, iar al patrulea este cu **4** mai mare decît al treilea, dar cu **18** mai mic decît al cincilea.

411. Adunînd **7** la diferența a două numere obținem **19**. Să se afle cele două numere, știind că micșorînd de **8** ori suma lor obținem **5**.

412. Aflați numerele ***a***, ***b*** și ***c***, știind că sînt numere consecutive pare și satisfac egalitatea: $104+104+a+104+b+c+104+104=598$.

413. Media aritmetică a patru numere naturale este **24**. Știind că media aritmetică a primelor trei numere este **20**, media aritmetică a ultimelor trei este **22**, iar două dintre numerele mai mici sînt consecutive pare, determinați numerele.

414. Produsul dintre numărul elevilor participanți la un concurs școlar și numărul ce reprezintă diferența dintre numărul fetelor și numărul băieților prezenți este **51**. Cîți băieți și cîte fete au participat la acel concurs? Cîte soluții sînt?

415. Resturile pe care le primesc trei copii în urma unor cumpărături sînt reprezentate de numere consecutive impare ce au suma egală cu media aritmetică a sumelor inițiale, care erau reprezentate tot de trei numere consecutive impare. Știind că primul și ultimul copil au avut împreună **2 046** lei, aflați ce sumă a cheltuit fiecare copil.

416. Resturile pe care le primesc patru copii, după ce au făcut niște cumpărături, sînt reprezentate de patru numere consecutive pare a căror sumă este egală cu media aritmetică a sumelor inițiale și care erau reprezentate de patru numere consecutive impare. Care este suma cheltuită de către fiecare copil, știind că ultimii doi au avut în total **268** lei?

417. Suma a două numere este **32**, iar diferența lor este dublul numărului mai mic. Care sînt cele două numere?

418. Suma a două numere este **35**, iar diferența lor este cît a treia parte din numărul mai mic. Aflați cele două numere.

419. Să se afle două numere naturale, știind că al doilea este de **4** ori mai mare decît primul, iar suma dintre dublul celui de-al doilea și triplul primului este **99**.

420. Suma a trei numere naturale este **240**. Primul este de două ori mai mare decît triplul celui de-al treilea și de două ori mai mare decît al doilea. Care sînt numerele?

421. Suma a două numere este **91**. Aflați numerele, știind că un sfert dintr-un număr este de **3** ori mai mare decît celălalt număr.

422. Trei copii aveau împreună suma de **8 960** lei. După ce primul a cheltuit o parte din suma sa, al doilea, dublul sumei cheltuite de primul, iar al treilea copil, dublul cît al doilea, fiecare are o sumă egală cu cît au cheltuit toți trei la un loc. Aflați ce sumă a avut fiecare copil.

423. Patru muncitori își împart suma primită pentru o lucrare efectuată. Primul ia cît o jumătate din ceea ce a luat al doilea, acesta cît două treimi din ceea ce a luat al treilea, iar acesta cît trei sferturi din ceea ce a luat al patrulea. Știind că media aritmetică a sumelor luate este **20 000**, aflați cîți lei a încasat fiecare.

424. În anul 1 994, suma vîrstelor mamei și fiicei sale este de 52 ani. În anul 1 998, vîrsta mamei va fi dublul vîrstei fiicei. Cîți ani a avut fiecare în anul 1 993?

425. În trei rafturi ale bibliotecii din camera lui Vlad sînt 90 de cărți. După ce Vlad transferă de pe raftul al doilea jumătate din numărul cărților pe primul raft, iar de pe raftul al treilea ia un sfert din numărul cărților și îl mută pe raftul al doilea, cele trei rafturi au același număr de cărți. Cîte cărți erau la început pe fiecare raft?

426. Să se afle un număr natural, știind că: a) dacă îl înmulțim cu 3, obținem același rezultat ca atunci cînd adunăm cu 20; b) dacă îl înmulțim cu $\frac{2}{3}$, obținem același rezultat ca atunci cînd scădem 20 din el; c) dacă îl înmulțim cu $\frac{2}{3}$, obținem același rezultat ca atunci cînd îl scădem din 20; d) dacă îl împărțim la 3, obținem același rezultat ca atunci cînd scădem 20 din el; e) dacă îl împărțim la 3, obținem același rezultat ca atunci cînd îl scădem din 20; f) dacă îl adunăm cu 15, obținem același rezultat ca atunci cînd îl scădem din 17.

427. Aflați două numere naturale, știind că o jumătate din primul număr este de 3 ori mai mică decît celălalt număr, iar diferența dintre ele este 1 000.

428. Diferența dintre o doime și o pătrime dintr-un număr este 8. Care este numărul?

429. Să se determine numărul $\overline{ab}$, în baza 10, știind că reprezintă $\frac{3}{8}$ din răsturnatul său.

430. Știind că o treime din lungimea unui segment este egală cu trei pătrimi din lungimea altui segment și că diferența dintre cele două segmente este de 35 cm, aflați lungimea fiecăruia.

431. Dan zice lui George: „Eu am 1 600 lei". George răspunde: „Eu am cît tine și încă jumătate din suma mea". Cîți lei are George?

432. Patru copii aveau fiecare aceeași sumă de bani. După ce primul a cheltuit 90 lei, al doilea 120 lei, al treilea 150 lei, iar al patrulea 153 lei, le-au rămas la un loc tot atîția lei cît avusese fiecare la început. Cîți lei a avut fiecare copil?

433. Rada are într-o pușculiță o sumă mai mică decît 800 lei. Dacă ar mări de 4 ori suma pe care o are, ar depăși 800 lei cu tot atîția lei cîți lipsesc pentru a avea această sumă. Cîți lei are Rada? (*Problemă compusă de eleva Rada Borza*).

434. Ioana are cu 880 lei mai mult decît Vera. Dacă fiecare ar mai avea cîte 100 lei, atunci Ioana ar avea de 5 ori mai mulți bani decît ar avea Vera. Cîți lei are fiecare?

435. Tatăl are 46 ani, fiul are 19 ani. a) Ce vîrstă avea tatăl cînd fiul avea 13 ani? b) Ce vîrstă va avea fiul cînd tatăl va avea 51 ani? c) Cu cîți ani în

urmă tatăl era de **4** ori mai în vîrstă decît fiul? d) Peste cîți ani tatăl va fi de **2** ori mai în vîrstă decît fiul?

436. Dany are de **7** ori mai puțini bani decît Tibi. După ce Tibi cheltuiește **200** lei, iar Dany primește cu **70** lei mai mult decît de **3** ori suma pe care a avut-o, sumele lor devin egale. Ce sumă a avut fiecare?

437. Vlad are de **5** ori mai mulți bani decît Florina. Aceasta cheltuiește **40** lei, iar Vlad o jumătate din cît a cheltuit Florina. În acest mod, fata are de **8** ori mai puțini bani decît băiatul. Cîți lei au rămas fiecăruia dintre cei doi copii?

438. Un copil are **12** ani, iar tatăl său **36** ani. Este posibil ca peste un număr de ani tatăl să aibă de **4** ori vîrsta fiului? De ce?

439. Fie trei numere naturale. Dacă se împarte primul la al doilea, se obține cîtul **3** și restul **3**, iar dacă se împarte al treilea la al doilea se obține cîtul **5** și restul **2**. Știind că diferența dintre al treilea și primul număr este **121**, aflați cele trei numere.

440. Dan se gîndește: „Dacă aș mai avea **300** lei, suma mea ar fi de **2** ori mai mare decît suma pe care o are George, iar dacă aș avea cu **300** lei mai puțin, suma mea ar fi cu **100** lei mai mică decît suma lui". Puteți afla ce sumă are fiecare dintre cele două persoane?

441. Într-o familie sînt patru copii. În absența mezinului, primii trei își împart suma de **100** lei astfel: primul ia o jumătate, al doilea cît un sfert din sumă, iar al treilea cît jumătate din suma luată de primul. Cînd apare mezinul, mama face parte dreaptă. Cum procedează?

442. Împărțiți numărul **34** în trei părți, astfel încît partea a doua să fie cu **6** mai mare decît prima, iar partea a treia să fie egală cu dublul părții întîi care a fost *micșorată* cu **2**.

443. Suma a **6** numere este **71**. Primele două sînt consecutive impare. Următoarele două au suma **25**, iar unul este mai mic decît celălalt de **4** ori. Ultimele două au diferența **18**, iar unul este mai mare decît celălalt de **4** ori. Aflați numerele.

444. Aflați **3** numere naturale știind că suma lor este **21**, primul număr este îndoitul celui de-al doilea, dar cu **6** mai mic decît al treilea.

445. Suma a **3** numere naturale este **30**. Aflați numerele, știind că primul număr este cu **3** mai mare decît al doilea, iar acesta este cît jumătate din suma celorlalte două numere.

446. Suma a **3** numere naturale este **416**.
Primul număr este de **3** ori mai mic decît suma celorlalte două, iar diferența dintre al treilea și al doilea este jumătate din al doilea număr plus **2**. Care sînt cele trei numere?

447. Suma a **6** numere este **87**. Primele două sînt consecutive pare. Următoarele două au suma **21**, iar unul este dublul celuilalt. Diferența dintre ultimele două este **24**, iar unul dintre ele este de **5** ori mai mare decît celălalt. Aflați numerele.

448. Dacă adunăm triplul unui număr cu triplul altui număr obținem **150**. Aflați numerele, dacă sînt îndeplinite pe rînd condițiile:
a) dublul diferenței dintre numerele astfel obținute este **96**.
b) dublul diferenței dintre numerele inițiale (nemodificate) este **40**.

449. Suma a trei numere naturale este **882**. Primul este cu **108** mai mic decît al doilea, iar acesta este de **4** ori mai mare decît al treilea. Aflați numerele.

450. Suma a **3** numere naturale este **852**. Ea întrece cu **204** întreitul celui de-al treilea număr, iar diferența dintre primele două numere este **8**. Aflați numerele.

451. Suma a trei numere naturale este **777**. Primul număr este cu **7** mai mare decît triplul celui de-al treilea și cu **7** mai mic decît al doilea număr. Aflați cele trei numere.

452. Mărind cu **10** triplul unui număr natural, obținem un număr cu **358** mai mare decît numărul inițial. Care este numărul?

453. Triplul unui număr este cu **50** mai mare decît jumătatea lui. Aflați numărul.

454. Suma dintre cîtul și restul unei împărțiri a două numere naturale nenule este **33**. Știind că restul este cu **1** mai mare decît întreitul cîtului, aflați cel mai mic deîmpărțit care îndeplinește aceste condiții.

455. Determinați cele două numere naturale a și b, știind că: **1**) dacă le împărțim obținem cîtul **4** și restul **3**, iar dacă adunăm pe **17** la îndoitul lui b obținem numărul a; **2**) a este dublul lui b și cu **100** mai mare decît $b-34$; **3**) b este mai mare cu **3** decît $2\cdot(a+2)$, dar cu **1** mai mic decît triplul lui a.

456. Dinu are cu **16** lei mai mult decît Camelia. Dacă numărul care reprezintă suma lui Dinu s-ar împărți la numărul care reprezintă suma Cameliei, cîtul ar fi **2**, iar restul **1**. Cîți lei are fiecare?

457. Suma a trei numere este **33**. Să se afle numerele, știind că primul este de **3** ori mai mare decît al treilea, iar al doilea este cu **1** mai mic decît sfertul acestuia din urmă.

458. Suma a trei numere este **17**. Să se afle numerele, știind că primul este îndoitul celui de-al treilea, iar al doilea este cu **3** mai mare decît sfertul primului număr.

459. Suma a **3** numere naturale este **61**. Aflați numerele, știind că această sumă este mai mare cu **7** decît triplul dublului celui de-al treilea număr, iar al doilea este cu **40** mai mare decît triplul primului număr.

460. Dublul unui număr natural a este mai mic decît triplul aceluiași număr cu **8**. Dacă am aduna numărul a cu alte două numere consecutive impare, am obține suma **20**. Care sînt cele două numere consecutive impare?

461. Dublul unui număr natural este mai mare decît sfertul său cu **28**. Care este acel număr?

462. O sîrmă lungă de **95** cm a fost tăiată în **2** bucăți mai mari și **3** bucăți mai mici, rămînînd **5** cm. Fiecare dintre bucățile mari era de **2** ori mai lungă decît bucățile mici luate la un loc. Ce lungime are fiecare bucată de sîrmă?

463. La piață, un producător a vîndut într-o zi mere și pere, în total **180** kg. A doua zi a vîndut de **3** ori mai multe fructe, și anume de **2** ori mai multe pere și de **5** ori mai multe mere decît în prima zi. Cîte kilograme de fructe de fiecare fel s-au vîndut în a doua zi?

464. Suma a două numere este mai mare cu **8** decît diferența lor. Aflați cele două numere, știind că produsul lor este **20**.

465. La adunarea triplului unui număr natural ***a*** cu dublul numărului natural ***b*** obținem **1 110**. Aflați numerele, știind că triplul diferenței celor două numere inițiale este **90**. Cîte soluții are problema?

466. Dacă adunăm triplul unui număr natural ***a*** cu dublul unui număr natural ***b***, obținem suma **3 240**, iar dacă efectuăm diferența dintre cele două numere astfel modificate, obținem diferența **720**. Care sînt numerele ***a*** și ***b***? Cîte soluții are problema?

467. Suma a două numere naturale este **24**. Dacă mărim primul număr cu suma lor, obținem de **7** ori al doilea număr. Care sînt numerele?

468. Diferența a două numere naturale este **14**. Dacă mărim primul număr cu **14**, obținem de **8** ori al doilea număr. Care sînt numerele?

469. Fie două numere naturale ***a*** și ***b***. Dacă împărțim pe ***a*** la ***b***, obținem cîtul **3**. Dacă la alt număr natural ***c*** adunăm **1**, obținem jumătate din numărul mai mare, ceea ce este cu **6** mai mult decît celălalt. Care este suma numerelor ***a*** și ***c***?

470. Avînd cîte **1 000** de lei, Mihai și Viorica au plecat după cumpărături. Aflați cîți lei a cheltuit fiecare, dacă resturile sînt respectiv numere consecutive pare, care valorează la un loc cît suma cheltuită de Viorica.

471. Diferența a două numere naturale este de **3** ori mai mică decît suma lor, dar cu **50** mai mică decît dublul sumei lor. Aflați numerele.

472. Suma a două numere este mai mare decît diferența lor cu **658**. Dacă împărțim suma la diferența lor, obținem cîtul **3** și restul **60**. Aflați cele două numere naturale.

473. Un lot dreptunghiular este împrejmuit cu un gard lung de **84** m. Lățimea este cu **2** m mai mare decît a patra parte din lungimea lotului. Se împarte lotul în **3** parcele, astfel încît două să fie egale, iar una mai mare cu **40** m^2 decît celelalte două la un loc. Care este aria fiecărei parcele?

474. Aflați aria unui dreptunghi care are perimetrul de **618** m, știind că, dacă mărim cu **4** m o treime din lățime, obținem cu **1** m mai mult decît o treime din lungime.

475. Perimetrul unui dreptunghi este **336** m. Aflați aria lui, știind că, dacă mărim cu **10** m jumătate din lățime, obținem cu **4** m mai puțin decît jumătate din lungime.

476. Dacă s-ar mări lungimea unui dreptunghi cu **6** m, atunci lățimea ar deveni jumătate din aceasta. Care sînt dimensiunile dreptunghiului, știind că perimetrul este de **60** m?

477. Cîte monede de fiecare fel au fost dacă suma de **1 400** lei a fost plătită numai în monede de **20** lei și de **50** lei, știind că: a) cele două feluri de monede erau în număr egal; b) suma plătită în monede de **20** lei era egală cu suma plătită în monede de **50** lei; c) numărul monedelor de **20** lei era diferit de numărul monedelor de **50** lei.

478. S-a încasat suma de **35 150** lei pentru **113** kg de fructe de trei calități: cu **350** lei/kg, cu **300** lei/kg și cu **250** lei/kg. Cîte kg de fructe s-au vîndut din ultimele două calități, dacă din prima calitate s-au vîndut **52** kg?

479. La ora de educație fizică profesorul a adus un număr de mingi. Dacă le-ar distribui cîte o minge la **5** elevi, ar rămîne **2** mingi nefolosite, iar dacă ar da cîte una la **3** elevi, ar rămîne **2** elevi fără minge. Cîți elevi erau și cîte mingi a adus profesorul?

480. Dacă ar fi cîte **10** jucători la fiecare panou de baschet, rămîn **2** panouri libere. Dacă ar fi cîte **7** jucători la fiecare panou, la ultimul ar mai trebui **2** jucători. Cîte panouri de baschet erau și cîți jucători au venit la acel antrenament?

481. Unui copil i s-au dat **4** mere, iar celorlalți cîte **6** mere. Dacă s-ar fi dat la fiecare copil cîte **5** mere, ar fi rămas **13** mere. Cîte mere și cîți copii au fost?

482. Dacă se așază cîte **10** creioane într-o cutie, rămîn **6** cutii goale și o cutie ar avea numai **3** creioane, iar dacă se așază cîte **6** creioane, într-o cutie rămîn **3** creioane. Cîte cutii și cîte creioane sînt?

483. Dacă elevii claselor a IV-a din școala noastră s-ar grupa cîte **9** în rînd, ei ar forma cu **15** rînduri mai puțin decît dacă s-ar grupa cîte **6** în rînd. Cîți elevi sînt în clasele a IV-a din școala noastră?

484. Pentru a călători cu un vaporaș, unui grup de elevi îi este necesară o sumă de bani. Fiecare elev trebuie să plătească **725** lei. Deoarece un copil nu mai poate participa la această călătorie, atunci costul călătoriei se ridică la **750** lei de persoană. Cîți elevi au plecat cu vaporașul și ce sumă totală trebuiau să plătească?

485. Determinați deîmpărțitul d și cîtul c știind că: a) $d : 13 = c$ (rest **12**) și $d : 17 = c$ (rest **0**); b) $d : 37 = c$ (rest **26**) și $d : 41 = c$ (rest **2**). Formulați apoi cîte o problemă pentru fiecare grup de relații date.

486. Cîți trandafiri și cîte lalele sînt în grădina bunicului, știind că dacă le grupează cîte un trandafir și o lalea, rămîn **6** lalele fără pereche, iar dacă le grupează cîte un trandafir și **2** lalele, rămîn **2** trandafiri negrupați?

487. La un concurs de matematică, Silviu a obținut **10** puncte. Știind că avea de rezolvat **8** probleme, iar pentru o problemă corect rezolvată a primit **3** puncte și pentru o problemă nerezolvată i s-au scăzut **4** puncte, aflați cîte probleme a rezolvat corect Silviu.

488. Suma a două numere este **56**. Dacă împărțim primul număr la **4**, iar al doilea la **2**, se obțin două numere a căror sumă este **19**. Aflați cele două numere.

489. Într-un an, 5 cai consumă 170 q de fîn. Cîte vaci se pot hrăni cu fînul pe care l-ar fi mîncat 3 cai într-un an, dacă o vacă mănîncă cîte 17 q în aceeași perioadă de timp?

490. Din 20 l lapte se obțin 2 kg de smîntînă, iar din 10 kg de smîntînă se obțin 3 kg de unt. Cîți litri de lapte trebuie pentru 60 kg de unt?

491. Trei brigăzi de muncitori ar fi terminat o lucrare astfel: prima în 4 zile, a doua în 6 zile, a treia în 8 zile. S-a alcătuit o echipă formată din $\frac{1}{6}$ din efectivul primei brigăzi, $\frac{1}{4}$ din efectivul brigăzii a doua și $\frac{1}{3}$ din efectivul brigăzii a treia. În cît timp s-a terminat lucrarea?

492. În vederea acordării premiilor la un concurs, Ștefănel a mers după cumpărături, avînd 3 000 lei. El a văzut că din suma pe care o are poate lua 6 pixuri și 36 creioane sau 6 pixuri și un stilou ori un stilou, un pix și 20 creioane. Cîți lei costă un articol de fiecare fel?

493. Cu suma de 1 288 lei s-au cumpărat 7 radiere, 9 creioane și 2 ascuțitori. Știind că un creion costă cu 8 lei mai mult decît o radieră și de 4 ori mai puțin decît o ascuțitoare, aflați cîți lei costă un articol de fiecare fel.

494. Patru copii au cumpărat caiete în valoare de 21 412 lei. Primul a cumpărat 22 caiete de dictando, al doilea 16 caiete de matematică, al treilea 18 caiete de biologie, iar al patrulea 12 caiete de notițe. Știind că un caiet de matematică a costat cu 7 lei mai mult decît un caiet de dictando, un caiet de biologie a costat cu 5 lei mai puțin decît un caiet de matematică, iar un caiet de notițe cu 3 lei mai puțin decît caietul de matematică, aflați ce sumă a cheltuit fiecare copil.

495. Cîți lei costă 1 kg de mere, dacă Bogdan a cumpărat 5 kg, plătind 960 lei și o cincime din prețul unui kg de mere?

496. Să se afle de cîte ori este mai mare perimetrul unui dreptunghi decît perimetrul unui pătrat, știind că lățimea dreptunghiului este egală cu latura pătratului, iar aceasta din urmă reprezintă o treime din lungimea dreptunghiului. Particularizați.

497. Găsiți valoarea lui f din:

a) $20-4=a$; $a+3=b$; $b+20=c$; $c-7=d$; $d-11=e$; $e+f=46$;

b) $198-99=a$; $a-16=b$; $b+18=c$; $c-57=d$; $d-9=e$; $f-e=102$.

498. Dacă la un număr se adaugă 17, apoi se scade 9, obținem diferența numerelor 203 și 18.

499. Din care număr trebuie scăzut de 7 ori cîte 7 pentru a obține un număr cu 7 mai mare decît 7?

500. Jumătatea unui număr mărită cu sfertul numărului 1 004 dă 1 007. Care este numărul?

501. Suma dintre jumătatea și sfertul unui număr este mai mică cu 230 decît suma dintre număr și 8. Care este numărul?

502. Din ce număr se scade **16** pentru a se obține diferența numerelor **37** și **20**?
503. Ce număr se scade din **100** pentru a se obține suma numerelor **29** și **18**?
504. Suma a două numere este **708**. Dacă din fiecare se scade numărul **108**, unul dintre ele devine **97**.
Ce rest rămîne din celălalt număr?
505. Diferența a două numere este cel mai mare număr impar de trei cifre. Unul dintre ele este **1 000**.
Care este celălalt număr? Cîte soluții sînt?
506. Dacă împărțim suma numerelor **266** și **198** la diferența dintre numărul **103** și un alt număr necunoscut ***a***, obținem cîtul **77** și restul **2**. Aflați numărul ***a***.
507. Micșorați cu **10** diferența dintre dublul cîtului numerelor **81** și **9** <u>și</u> triplul lui **3** micșorat cu **2**.
508. Determinați ***y*** din:
a) $(72 : 3 - y - y) : y = y;$
b) $(44 - y + 4) : y - 4y = y;$
c) $24 : y + 4 + y : y = 11;$
d) $17 : y + y - y : y = 17;$
e) $y \times 23 : 4 + y \times 23 : 4 = 184;$
f) $3 \cdot (y : 2 \times 4) + 2(y : 2 \times 4) = 60.$
509. Determinați ***x*** din:
$1 + \{16\ 000 - [(6x + 3\ 708) : x + 1\ 008] \cdot 13 - 60\} : 80 = 2$
510. Rezolvați în două moduri următoarele exerciții:
$7 \times 6 : 6 =$
$18 : 2 \times 8 =$
$9 \times 8 : 3 =$
$12 \cdot (6 : 3 + 4) =$
$(20 : 4 + 5) \times 8 =$
$9 \cdot (a : 3 + a) =$
apoi determinați numărul ***a*** din:
1) $8 + 4 \cdot \{3 + 3 \cdot [a + 4 \cdot (a : 2 + 2) : 6\} : 31 = 12;$
2) $128 - \{46 + [a - 4 \cdot (a : 8 + 6) + 90] : 5\} : 4 + 7 = 110;$
3) $13\ 230 : (a \cdot a - 32) - 8\ 080 : (7 \times 86 - 18 \times 29) = 169.$
511. Determinați numărul natural ***x*** din:
a) $28 + 8 \cdot [x - 8 : (1\frac{3}{4} + 0{,}75 + 1\frac{1}{2}) : (\frac{3}{4} + 0{,}75 + \frac{1}{2})] = 100;$
b) $\dfrac{(1:3+2:3+1) \cdot (1:3+2:3)+2}{x+(1:7+3:7+4:7+6:7)} = 4-(2:5+8:5).$
512. Din bomboanele pe care le-a avut, Diana a servit cu cîte **2** pe fiecare dintre colegii săi, iar restul l-a împărțit în mod egal cu cele trei surori ale sale. Aflați cîte bomboane a avut inițial Diana, dacă sora sa cea mică a primit **4** bomboane, iar toți cei **30** de elevi ai clasei au fost prezenți.

513. La o fermă de păsări, numărul curcilor este $\frac{1}{4}$ din totalul păsărilor. Numărul rațelor era cît $\frac{1}{4}$ din numărul rațelor, găinilor și al gîștelor la un loc. Numărul gîștelor era cu **2 754** mai mare decît $\frac{1}{4}$ din numărul gîștelor și al găinilor la un loc. Știind că erau **5 508** găini, aflați cîte păsări de fiecare fel erau.

514. Anca împarte **48** de mere în **3** grămezi neegale ca număr. Apoi ia din prima grămadă cîte mere sînt în a doua și le adaugă la a doua grămadă. Ia din a doua cîte mere sînt în a treia și le adaugă la a treia grămadă. Apoi ia din a treia cîte mere sînt acum în prima și le adaugă la aceasta din urmă. Cîte mere erau la început în fiecare grămadă, știind că după modificările menționate, ele conțin același număr de mere?

515. În trei grămezi sînt respectiv **7**, **11** și **6** nuci. Transferînd nuci de la toate grămezile, de fiecare dată punînd în fiecare grămadă tot atîtea nuci cîte conține ea în momentul respectiv, după **3** mutări, se obțin grămezi de nuci egale ca număr. Care sînt cele trei mutări?

516. În două bidoane A și B de aceeași capacitate se găsește lapte: în primul lipsesc **3** sferturi din capacitatea sa, iar în bidonul B ar mai trebui **2** litri ca să se umple. Turnăm din bidonul B lapte în bidonul A cu **2** l mai mult decît jumătatea cantității existente în A. După această operație, rămîn **6** litri în plus în B față de cantitatea obținută în A. Aflați cantitatea inițială de lapte din fiecare bidon.

517. Trei frați și-au împărțit **24** mere, luînd fiecare un număr egal cu vîrsta sa de acum **3** ani în urmă. În continuare, cel mic își ia numai o doime din numărul merelor ce i se cuvin, restul împărțindu-l în mod egal celorlalți doi. Mijlociul își oprește o doime din numărul merelor ce le avea acum, restul împărțindu-l celorlalți doi în mod egal. Cel mare își oprește o jumătate din ce are acum, restul împărțindu-l în mod egal celorlalți doi. În acest mod, copiii aveau același număr de mere. Cîți ani are fiecare?

518. Pe trei rafturi erau cărți. Alex ia jumătate din numărul cărților de pe primul raft și o repartizează în mod egal în celelalte două rafturi. Lui Bogdan nu îi place această aranjare a cărților și atunci ia jumătate din numărul cărților ce le-a găsit pe al doilea raft și o repartizează în celelalte două rafturi. Cînd vine Cristian, vrînd ca pe fiecare raft să fie cîte **16** cărți, el ia jumătate din numărul cărților pe care le-a găsit pe al treilea raft și o repartizează în celelalte două rafturi. Cum puteți afla cîte cărți erau la început pe fiecare raft?

519. Determinați numărul natural y din:

a) $\{[(3y+5)\cdot 3+5]\cdot 3+5\}\cdot 3+5=281$;

b) $2+2\cdot\{2+2\cdot[2+2\cdot(2-2:y)]\}=22$;

c) $1+\{2\cdot[3+(y-4)\cdot 5]:6\}\cdot 7=8$.

520. Cu trei sferturi din banii pe care îi are, un elev cumpără un pix. Cu o treime din banii rămași, cumpără două creioane a cîte **63** lei fiecare. Cîți lei a costat pixul?

521. Mama a pus pe masă un număr de mere și le-a spus celor trei băieți ca, atunci cînd se vor întoarce de la școală, să și le împartă în mod egal. Întîi a venit Bogdan, care și-a luat partea ce i se cuvenea din numărul merelor și a plecat. Apoi s-a întors de la școală Cristian care, crezînd că este primul sosit, își ia partea ce socotește că i se cuvine și pleacă. Apoi a venit Cosmin care, fiind încredințat că el este primul, își ia partea sa, lăsînd pe masă **8** mere. Cîte mere a pus pe masă mama băieților?

522. O familie a făcut o excursie de **3** zile. Cu ce sumă a plecat ea de acasă dacă în prima zi a cheltuit cu **350** lei mai mult decît un sfert din suma întreagă, a doua zi un sfert din rest mai puțin **50** lei, în a treia zi o jumătate din noul rest plus **1 000** lei și i-au mai rămas **4 800** lei? Aflați apoi cîți lei a cheltuit familia în fiecare zi.

523. Andrei are **1 000** lei, iar Alexandra **1 060** lei. Mai primesc de la tatăl lor suma de **1 000** lei pe care și-o împart astfel încît să aibă sume egale. Cîți lei a luat fiecare din suma de **1 000** lei?

524. Tatăl a doi copii are **50** ani, iar un copil este mai mic decît celălalt cu **4** ani. Știind că peste **8** ani tatăl va avea vîrsta egală cu suma vîrstelor celor doi copii, aflați ce vîrstă are fiecare copil.

525. a) Un tată are patru copii de **11**, **9**, **7** și, respectiv, de **5** ani. El are **32** ani. Peste cîți ani vîrsta tatălui va fi jumătate din suma vîrstelor copiilor săi?

b) Aflați vîrstele celor două prietene, Monica și Irina, știind că acum 4 ani vîrsta Monicăi era de patru ori mai mare decît diferența vîrstelor lor, iar peste 4 ani suma vîrstelor acestora va fi cu 12 ani mai mare decît dublul vîrstei actuale a Irinei.



II. Soluții și răspunsuri

Pentru mai multe rezolvări (soluții) la problemele de tipul celor cuprinse în acest capitol, a se vedea cap.**II-VIII** din volumul **1** al acestei culegeri.

380. 11 mere; 7 mere.

381. Numerele consecutive au diferența 1, deci primul număr este 7, iar al doilea este 8.

382. Numerele consecutive pare sau impare au diferența 2; deci primul număr este 8, iar al doilea este 10.

383. 9; 11.

384. Primul număr (a) este mai mic, iar al treilea (c) este mai mare. Dintr-o eventuală reprezentare grafică se poate concluziona că: $3a=12-3-3-3$; $a=1$; $b=4$; $c=7$.

385. Dublul prețului unei gume era $14-4=10$ lei. O gumă costa 5 lei, iar un creion, 9 lei. Restul primit era 1 leu, căci $70-(6\times 9+3\times 5)=1$.

386. Fie cele trei numere a, b și, respectiv, c. Rezultă:

c
b
7
38-13=25

Din desen rezultă că $2c=25-7 \Rightarrow c=9$, iar $b=9+7 \Rightarrow b=16$.

387. Fie a și b cele două numere. Din enunț rezultă: $a+b=32$; $32-(a-b)=8$. Putem afla diferența celor două numere. Deci $a-b=32-8 \Rightarrow a-b=24$. O reprezentare grafică poate fi:

b
a
24
32

Rezultă: $2b=8 \Leftrightarrow b=4$; $a=28$.

388. Fie a și b cele două numere. Din enunț rezultă: $a-b=8$; $(a+b)-8=14 \Rightarrow a+b=22$. Pe baza unei reprezentări grafice, obținem $b=7$; $a=15$.

389. Fie a și b cele două numere. Din enunț rezultă: $(a+b)+(a-b)=28$; $(a+b)-(a-b)=16$. Într-o reprezentare grafică, avem:

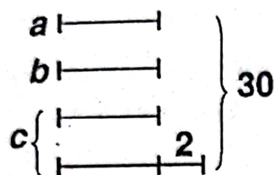
a-b
a+b
16
28

Rezultă $a-b=(28-16):2 \Rightarrow a-b=6$, iar $a+b=22$. Atunci $b=8$, $a=14$.
Observație: Calea algebrică este mult mai economicoasă.

390. Fie a și b cele două numere. Din enunț rezultă: $a-b=5$; $a+b+5=32 \Rightarrow a+b=27$. Obținem $2b=22 \Rightarrow b=11$, iar $a=16$.

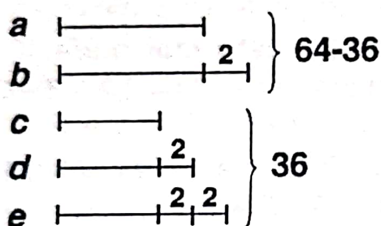
391. Din enunț rezultă: $a+b=19$; $19+(a-b)=26 \Rightarrow a-b=7$. Atunci: $2b=19-7 \Rightarrow b=6$, iar $a=13$.

392. Din enunț rezultă: $a+b+c=30$; $a=b$; $2a+2=c$. Deci:



Rezultă $4a=28 \Leftrightarrow a=7$; $b=7$; $c=2\times 7+2=16$.

393. $a+b+c+d+e=64$; $b=a+2$; $a+b=64-36=28$; $d=c+2$; $e=d+2 \Rightarrow e=c+4$; $c+d+e=36$. Reprezentarea grafică poate fi:



Din desene rezultă: $2a=28-2 \Rightarrow a=13$; $b=15$; $3c=36-6 \Rightarrow c=10$; $d=12$; $e=14$.

394. Fie a și b cele două numere. Din enunț rezultă: $(a+b):(a-b)=14 \Rightarrow a+b=14(a-b) \Rightarrow 28=14(a-b) \Rightarrow a-b=28:14 \Rightarrow a-b=2$. Obținem $b=13$; $a=15$.

395. Fie a și b cele două numere. Din enunț rezultă: $(a+b):(a-b)=4 \Rightarrow (a+b):8=4 \Rightarrow a+b=32$. Obținem $b=12$; $a=20$.

396. $a+b=64$; $64:[2(a-b)]=4 \Rightarrow 64=8(a-b) \Rightarrow a-b=8$. Atunci $b=28$, iar $a=36$.

397. $a+b=36$; $36:[(a-b):2]=6 \Rightarrow (a-b):2=36:6 \Rightarrow a-b=12$. Atunci $b=12$, iar $a=24$.

398. $a-b=16$; $(a+b):[(a-b):4]=8 \Rightarrow (a+b):(16:4)=8 \Rightarrow a+b=32$; $a-b=16$. Atunci $b=8$; $a=24$.

399. $a-b=4$; $(a+b):[3\cdot(a-b)]=4 \Rightarrow a+b=48$. Atunci $b=22$, iar $a=26$.

400. $a-b=10$; $5(a+b):[(a-b)\cdot 4]=2 \Rightarrow 5(a+b):40=2 \Rightarrow a+b=16$. Obținem $b=3$, iar $a=13$.

401. $a+b=80$; $40:[2\cdot(a-b)]=2 \Rightarrow a-b=10$. Obținem $b=35$, iar $a=45$.

402. Fie cele trei numere naturale a, b și, respectiv, c. Din enunț rezultă: $a+b=10$; $a+c=6$; $b+c=8$. Atunci $2(a+b+c)=24 \Rightarrow a+b+c=12$; $a=4$; $b=6$; $c=2$.

403. Din enunț rezultă: $a+b+c=17$; $a+b=11$; $b+c=15$. Atunci $c=6$; $a=2$; $b=9$.

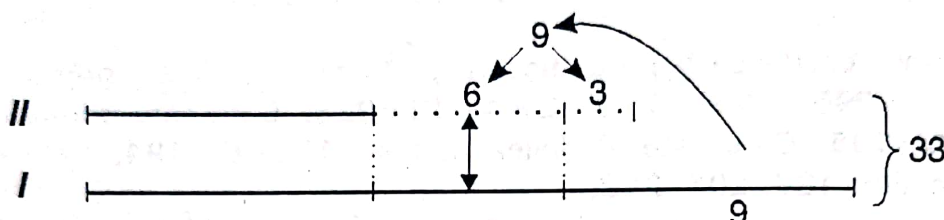
404. Notăm numărul de bile cu a, g și, respectiv, cu r. Din enunț rezultă:

$g+r=8$; $a+r=12$; $a+g=10$; $g+r+a=(8+12+10) : 2 \Leftrightarrow g+r+a=15$. Deci $a=7$; $g=3$; $r=5$.

405. Din transferul enunțat rezultă că într-o vază sînt cu $2+2=4$ flori mai multe decît în cealaltă. Într-o vază sînt $(12-4) : 2=4$ flori, iar în cealaltă $4+4=8$ flori.

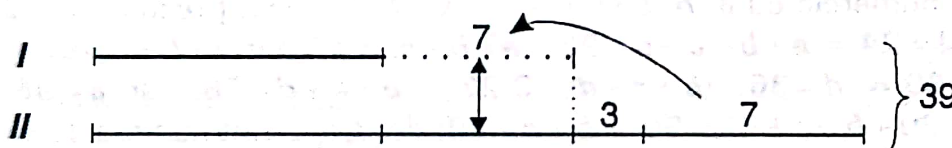
406. După transfer se obțin 3 părți egale, deci suma totală se împarte exact la 3. Unicul număr care se împarte exact la 3 și este cuprins între 16 și 20 este numărul 18. Cîți lei are Dinu? $(18 : 3)+6+4=16$ (lei) Cîți lei are Alex? $(18 : 3)-4=2$ (lei) Cîți lei are Tibi? $(18 : 3)-6=0$ (lei).

407. O reprezentare grafică a numărului de cărți poate fi:



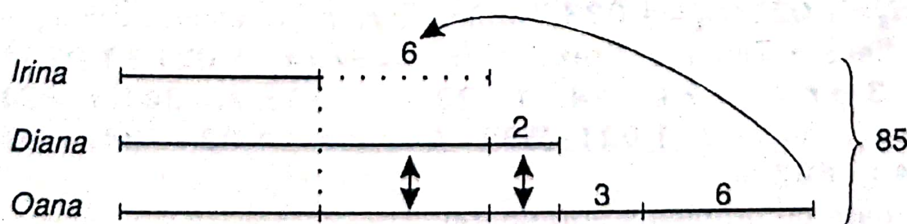
Din desen rezultă că în primul raft sînt cu $9+(9-3)=15$ cărți mai multe decît pe al doilea raft. Atunci: pe al doilea raft erau $(33-15) : 2=9$ cărți, iar pe primul raft erau $33-9=24$ cărți.

408. O reprezentare grafică poate fi:



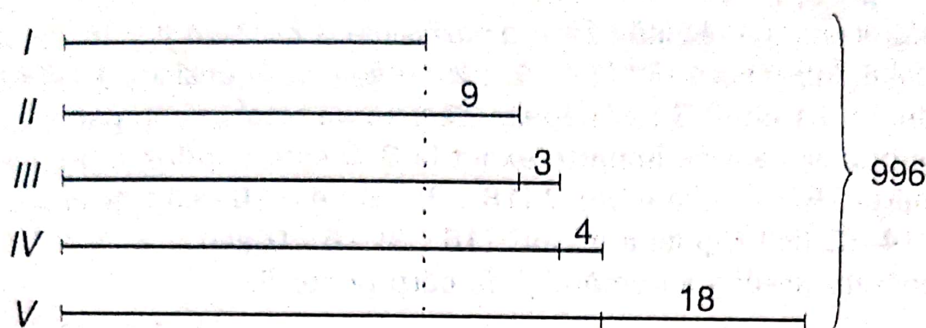
Din desen rezultă că în primul teanc erau cu $7+3+7=17$ caiete mai multe decît în al doilea teanc. Atunci: în primul teanc erau $(39-17) : 2=11$ caiete, iar în al doilea teanc erau $39-11=28$ caiete.

409. O reprezentare grafică poate fi:
Sumele pentru:



Obținem: triplul sumei Irinei este $85-(6+2+6+2+3+6)=60$ lei. Cîți lei avea Irina? $60 : 3=20$ (lei). Cîți lei avea Diana? $20+8=28$ (lei). Cîți lei avea Oana? $28+3+6=37$ (lei).

410. O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că **5** părți, fiecare parte fiind egală cu primul număr, reprezintă $996-4\times9-3\times3-2\times4-18=925$. Care este primul număr? $925:5=185$. Care este al doilea număr? $185+9=194$. Celelalte trei numere sînt: **197; 201; 219.**

411. Fie cele două numere a și b. Din enunț rezultă: $a-b+7=19$, iar $(a+b):8=5$. Aceste două relații cuprind <u>suma</u> și <u>diferența</u> celor două numere, adică $a-b=12$, iar $a+b=40$. Rezultă (și după o eventuală reprezentare grafică): $b=(40-12):2\Rightarrow b=14$; $a=26$.

412. Obținem: $a+b+c=598-5\cdot104\Leftrightarrow a+b+c=78$. Din enunț rezultă că $b=a+2$, $c=a+4$, iar $3a=72$. Deci $a=24$; $b=26$; $c=28$.

413. Notăm numerele cu a, b, c și, respectiv, d. Din enunț rezultă: $(a+b+c+d):4=24\Rightarrow a+b+c+d=96$; $(a+b+c)=3\cdot20\Rightarrow a+b+c=60$ iar $d=96-60\Rightarrow d=36$; $(b+c+d)=3\cdot22\Rightarrow b+c+d=66$, iar $a=96-66\Rightarrow a=30$; $30+b+c+36=96\Rightarrow b+c=30$; dar b și c sînt numere consecutive pare, adică $b+b+2=30\Rightarrow b=14$, iar $c=16$.

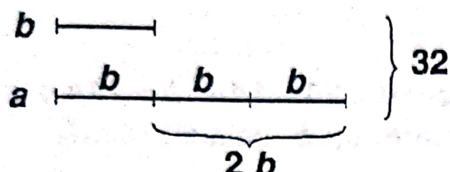
414. Notăm cu f numărul fetelor, cu b numărul băieților; atunci numărul elevilor participanți este $f+b$. Din enunț rezultă: $(f+b)\cdot(f-b)=51\Leftrightarrow(f+b)\cdot(f-b)=17\cdot3=51\cdot1$. Dacă $f+b=17$, atunci $f-b=3$. De aici avem o problemă simplă de sumă și diferență: $b=7$, iar $f=10$. Dacă $f+b=51$, iar $f-b=1$, atunci $b=25$, iar $f=26$.

415. Notăm cu S_1, S_2 și, respectiv, cu S_3 sumele inițiale ale celor trei copii. Din enunț rezultă: $S_1+S_3=2\,046\Leftrightarrow S_1+(S_1+4)=2\,046\Rightarrow 2S_1=2\,042\Rightarrow S_1=1\,021$; $S_3=1\,025$; $S_2=1\,023$. Notăm cu r_1, r_2 și, respectiv cu r_3 resturile primite de fiecare. Din enunț rezultă: $(r_1+r_2+r_3)=(1\,021+1\,023+1\,025):3\Rightarrow r_1+r_1+2+r_1+4=1\,023\Rightarrow r_1=339$; $r_2=341$; $r_3=343$. Cîți lei a cheltuit fiecare? $1\,021-339=682$ sau $1\,023-341=682$ sau $1\,023-343=682$ (lei).

416. (Asemănătoare cu problema anterioară).
Dacă sumele avute erau reprezentate de patru numere consecutive impare, atunci ele sînt de forma: a; $a+2$; $a+4$; $a+6$; iar $a+4+a+6=268$, adică $a=129$; celelalte sume sînt: **131; 133; 135.** Media aritmetică a sumelor este $(129+131+133+135):4=528:4=132$. Dacă resturile sînt repre-

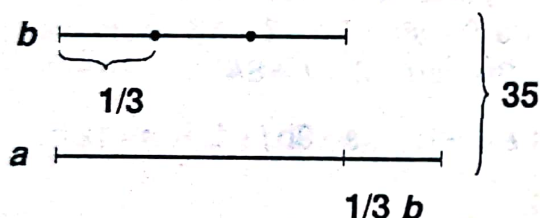
zentate de patru numere consecutive pare, ele sînt de forma: r; $r+2$; $r+4$; $r+6$, iar $r+r+2+r+4+r+6=132$, adică $r=30$.
Deoarece sumele avute erau numere consecutive impare, iar resturile, numere consecutive pare, rezultă că ei au cheltuit sume egale, adică $129-30=99$ sau $131-32=99$ sau $133-34=99$ sau $135-36=99$ (lei cheltuiți).

417. Rezolvarea 1
Fie a și b cele două numere. Reprezentarea grafică poate fi:



Rezultă $4b=32$, iar $b=8$; $a=24$.
Rezolvarea 2
$a+b=32$; $a-b=2b \Leftrightarrow a=3b$. Înlocuim în sumă pe a și obținem $4b=32$; $b=8$; $a=24$.

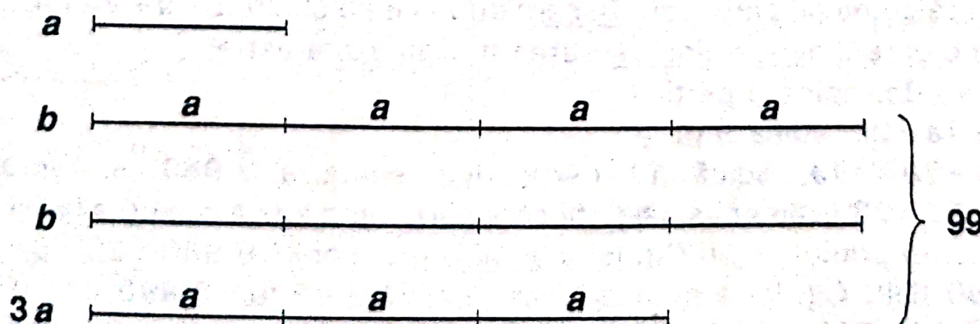
418. Rezolvarea 1 O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că 7 părți, fiecare egală cu a treia parte din b, reprezintă 35. Atunci: $b=35 : 7\times3=15$; $a=35-15=20$.
Rezolvarea 2

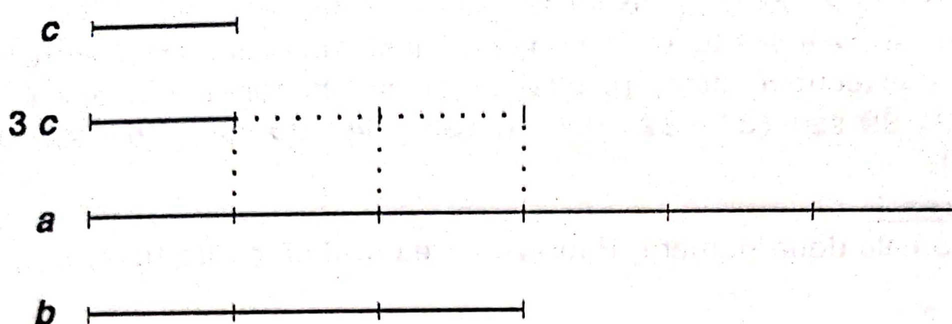
$a+b=35$; $a-b=\frac{1}{3}b \Rightarrow a=\frac{4}{3}b$. Atunci $\frac{4}{3}b+b=35 \Rightarrow b=35 : 7\times3=15$; $a=20$.

419. Notăm numerele cu a și b. O reprezentare grafică poate fi:



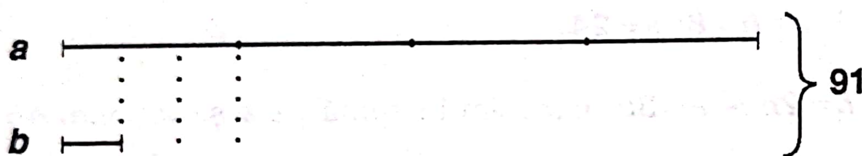
Rezultă $11a=99$, iar $a=9$; $b=36$.

420. O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că $10c=240$; $c=24$; $a=6\times24=144$; $b=144:2=72$.

421. Rezolvarea 1 Notăm cu a numărul mai mare, cu b, celălalt număr. O reprezentare grafică poate fi:

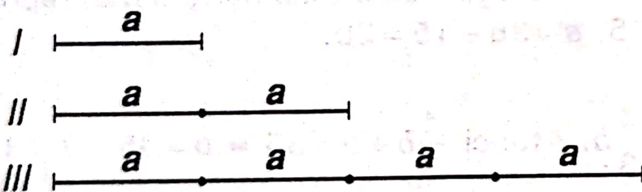


Într-un sfert din a sînt 3 părți, fiecare parte fiind egală cu b; atunci în a sînt $4\times3=12$ astfel de părți. În suma de 91 sînt $1+12=13$ asemenea părți. Atunci: $b=91:13=7$; $a=91-7=84$ sau $12\times7=84$.

Rezolvarea 2 Din enunț rezultă: $a+b=91$; $\frac{1}{4}a=3b\ /\times4 \Rightarrow a=12b$.

Atunci $12b+b=91 \Rightarrow b=7$; $a=84$.

422. Reprezentăm grafic sumele cheltuite de fiecare copil:



Cîte părți (egale între ele) au cheltuit cei trei copii (Cîte părți egale reprezintă suma pe care o are fiecare după ce au cheltuit)? $a+2a+4a=7a$.
Suma pe care a avut-o fiecare putea fi organizată astfel:
I: $a+7a=8a$, adică 8 părți;
II: $2a+7a=9a$, adică 9 părți;
III: $4a+7a=11a$, adică 11 părți; deci suma a 8 960 lei reprezintă $8+9+11=28$ asemenea părți, fiecare parte fiind egală cu suma (a) pe care a cheltuit-o primul copil. Cîți lei a avut primul copil? $8\,960:28\times8=$ $=2\,560$ (lei). Cîți lei a avut al doilea copil? $9\times320=2\,880$ (lei). Dar al treilea? $11\times320=3\,520$ (lei). Sau (soluție propusă de *Alex Posmangiu*): Dacă celor 3 copii le-au rămas sume egale, acestea reprezintă 3 părți mari,

fiecare egală cu suma cheltuită de cei 3 copii la un loc. Rezultă că suma de 8 960 lei poate fi organizată în 3 părţi plus o parte $\Rightarrow$ 4 asemenea părţi. Cîţi lei a cheltuit primul copil? $8\,960 : 4 : 7 = 320$ (lei); iniţial avea $8 \times 320 = 2\,560$ lei, căci o parte mică plus 7 părţi mici formează suma iniţială etc.

423. Rezolvarea 1 Fie a, b, c şi, respectiv, d sumele primite de fiecare muncitor. Ele se pot reprezenta grafic, pornind de la d, astfel:

d |—|—|—|—|

c |—|—|—|

b |—|—|

a |—|

$(a+b+c+d) : 4 = 20\,000 \Rightarrow a+b+c+d = 80\,000$

Din desen rezultă că 10 părţi, fiecare egală cu suma primită de primul muncitor, reprezintă 80 000 lei. Cîţi lei a încasat primul muncitor? $80\,000 : 10 = 8\,000$ (lei). Cîţi lei a încasat al doilea? $2 \times 8\,000 = 16\,000$ (lei). Cîţi lei a încasat al treilea muncitor? $3 \times 8\,000 = 24\,000$ (lei). Dar al patrulea? $4 \times 8\,000 = 32\,000$ (lei).

Rezolvarea 2 Păstrăm notaţiile de mai sus. Din enunţ rezultă: $c = \frac{3}{4}d$; $b = \frac{2}{3}c = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}d = \frac{1}{2}d$; $a = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}d$. Atunci $d + \frac{3}{4}d + \frac{1}{2}d + \frac{1}{4}d = 80\,000 \Leftrightarrow \frac{10}{4}d = 80\,000 \Rightarrow d = 80\,000 : 14 \times 4 = 32\,000$; $a = 8\,000$; $b = 16\,000$; $c = 24\,000$.

424. Rezolvarea 1 Notăm vîrsta pe care o are mama în 1 994 cu m, iar pe cea a fiicei cu f. Din enunţ rezultă că în anul 1 994, $m+f=52$, iar în 1 998, adică peste 4 ani, $m+4=2(f+4)$. Care este suma vîrstelor mamei şi fiicei în anul 1998? $m+f+4+4=52+8 \Rightarrow m+f+8=60$. Dar 60 reprezintă 3 părţi, fiecare parte fiind egală cu vîrsta fiicei din anul 1 998. Ce vîrstă are fata în anul 1 998? $60 : 3 = 20$. Dar în anul 1 993? $20-(1\,998-1\,993)=20-5=15$. Ce vîrstă are mama în anul 1 993? $(52-1)-(15+1)=51-16=35$.

Rezolvarea 2 Păstrăm notaţiile de mai sus:

$f+4$ |—— f ——|·· 4 ··|

$2(f+4)$ |—— f ——|·· 4 ··|—— f ——|·· 4 ··|

adică $m+4$

$\Big\}$ $52+(4+4)=60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3f = 60-12 \Rightarrow f=16$, iar $m=36$. În 1993, cu un an în urmă, mama avea 35 ani, iar fiica, 15 ani.

Rezolvarea 3 Dacă $m+f=52$, iar $m+4=2f+8 \Rightarrow m=2f+4$, iar $2f+4+f=$ $=52 \Rightarrow f=16$; $m=36$. În anul 1 993, mama avea 35 ani, iar fiica, 15 ani.

425. Notăm cu *I*, *II* și, respectiv, *III*, numărul inițial de cărți de pe fiecare raft.

Rezolvarea 1 Sugestii pentru reprezentarea grafică:

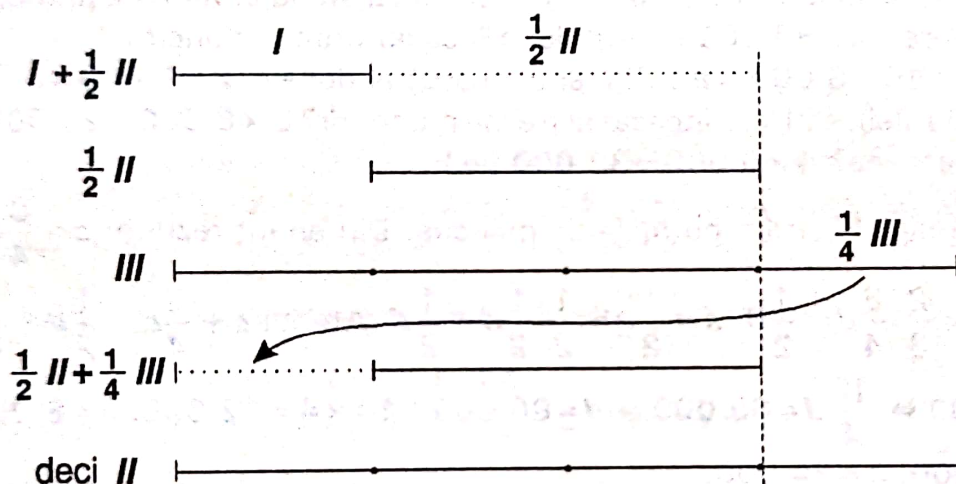
1) indicăm printr-o linie verticală punctată limitele segmentelor ce vor reprezenta cele trei numere obținute (egale);

2) reprezentăm printr-un segment *I*, iar în continuare, pînă la linia punctată, o jumătate din *II*;

3) deoarece nu știm deocamdată cît de mare este segmentul ce reprezintă *II*, desenăm o jumătate din *II* (ceea ce a fost transferat la *I*);

4) reprezentăm segmentul *III*, din care luăm un sfert și îl transferăm lîngă o jumătate din *II*; în segmentul *III* rămîn 3 sferturi din *III*;

5) reprezentăm o jumătate din *II*, ca la punctul 3), apoi adăugăm (în față) un sfert din *III*. Obținem 3 segmente egale, adică:



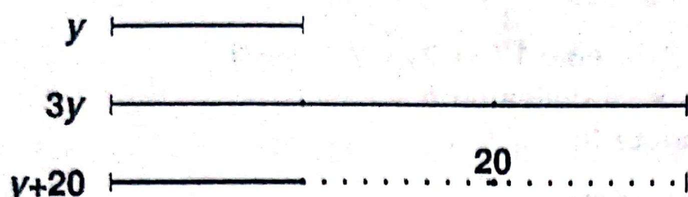
Dacă $\frac{3}{4}III=\frac{1}{2}II+\frac{1}{4}III$, rezultă $\frac{1}{2}II=\frac{2}{4}III$, iar $II=III$; dacă $I+\frac{1}{2}II=\frac{3}{4}II \Rightarrow$ $I=\frac{1}{4}II=\frac{1}{4}III$, iar $II=III=4I$, rezultă: $I+II+III=90 \Rightarrow 9I=90 \Rightarrow I=10$; $II=III=$ $=4\times 10=40$.

Rezolvarea 2 Cîte cărți sînt pe fiecare raft după transfer? $90 : 3=30$. Dar 30 reprezintă $\frac{3}{4}$ din *III*, deci $III=40$. Dacă $II=30$ plus $\frac{1}{2}$ din *II* minus un sfert din 40, rezultă $II=30-10+\frac{1}{2}II$, adică $\frac{1}{2}II=20 \Rightarrow II=40$. Dacă $I=30$ minus o jumătate din 40, rezultă $I=30-20=10$ (cărți).

426. Rezolvarea 1 Notăm cu *y* numărul căutat. Observații (pentru clasa a IV-a): Ce înseamnă că înmulțim *y* cu 3? Îl repetăm pe *y*, ca termen al adunării de 3 ori. Ce înseamnă că înmulțim *y* cu 1? Îl luăm în considerare pe *y* o singu-

ră dată, căci $y \times 1 = 1 \times y = y$. Ce înseamnă că înmulțim y cu $\frac{2}{3}$? Înseamnă că luăm în considerare numai $\frac{2}{3}$ din y.

a) Reprezentarea grafică poate fi:



Rezultă $2y = 20$, iar $y = 10$.

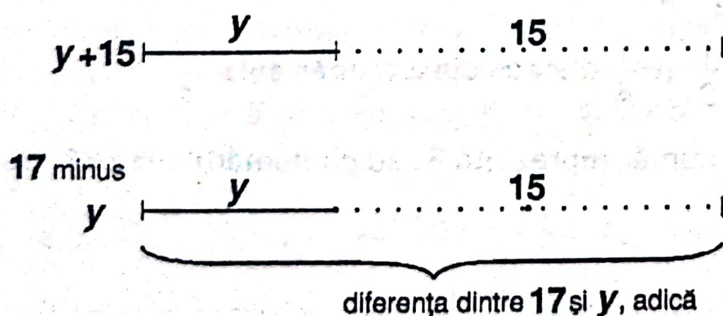
b) Dacă am luat în considerare numai $\frac{2}{3}$ din y, a mai rămas $\frac{1}{3}$ din y. Dacă prin scăderea lui 20 din y obținem tot $\frac{2}{3}$ din y, înseamnă că am scăzut $\frac{1}{3}$ din y, deci $\frac{1}{3}y = 20 \Rightarrow y = 60$.

c) Descăzutul 20 este compus din $\frac{2}{3}y + y$, adică $\frac{5}{3}y = 20 \Rightarrow y = 20 : 5 \times 3 \Leftrightarrow y = 12$.

d) $y : 3 = y - 20$, adică $\frac{2}{3}y = 20 \Rightarrow y = 20 : 2 \times 3 \Rightarrow y = 30$.

e) $y : 3 = 20 - y \Rightarrow 20 = y + \frac{1}{3}y \Rightarrow y = 20 : 4 \times 3 \Rightarrow y = 15$.

f) Reprezentarea grafică poate fi:



$17 = y + (y + 15) \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$.

<u>Rezolvarea 2</u>

a) $3y = y + 20 / - y \Rightarrow y = 10$;

b) $\frac{2}{3}y = y - 20 / - \frac{2}{3}y \Rightarrow \frac{1}{3}y = 20 \Rightarrow y = 60$;

c) $\frac{2}{3}y = 20 - y / + y \Rightarrow \frac{5}{3}y = 20 \Rightarrow y = 12;$

d) $y : 3 = y - 20 / - \frac{1}{3}y \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}y - 20 \Rightarrow y = 30;$

e) $y : 3 = 20 - y / - \frac{1}{3}y \Rightarrow 0 = 20 - \frac{4}{3}y \Rightarrow y = 15;$

f) $y + 15 = 17 - y / + y \Rightarrow 2y + 15 = 17 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1.$

427. Notăm primul număr cu a, al doilea cu b.
Reprezentarea grafică poate fi:

a

$\frac{1}{2}a$

b 1000

$\frac{1}{2}a$ $\frac{1}{2}a$ $\frac{1}{2}a$

Din desen rezultă că o jumătate din a este 1 000.
Deci $a = 2\ 000$, iar $b = 3 \times 1\ 000 = 3\ 000$.

Sau: Din enunț rezultă: $\frac{1}{2}a \cdot 3 = b$, iar $b - a = 1\ 000$.

Prin înlocuirea lui b în diferență, obținem:

$\frac{3}{2}a - a = 1\ 000 \Rightarrow a = 2\ 000$, iar $b = 3\ 000$.

428. Rezolvarea 1

Fiind același întreg, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Deci diferența dintre $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{4}$ ale aceluiași număr este $\frac{1}{4}$.

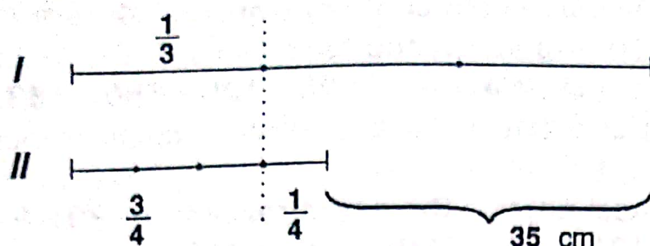
Rezultă că $\frac{1}{4}$ din acel număr reprezintă 8, adică numărul este 32, deoarece $4 \times 8 = 32$.

Rezolvarea 2

$\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a \Rightarrow \frac{1}{4}a = 8 \Rightarrow a = 8 \times 4 \Rightarrow a = 32.$

429. Din enunț rezultă că $\overline{ab} = \frac{3}{8}$ din $\overline{ba} \Leftrightarrow \overline{ab} = \frac{3}{8}\overline{ba}$. Deci dacă repetăm pe $\overline{ab}$ de 8 ori obținem de 3 ori $\overline{ba}$ (dacă înmulțim cu 8 fiecare membru al egalității obținem o altă egalitate), adică: $8 \cdot \overline{ab} = 3 \cdot \overline{ba} \Rightarrow 8 \cdot (10a + b) = 3 \cdot (10b + a) \Rightarrow 77a = 22b / : 11 \Rightarrow 7a = 2b \Rightarrow a = 2,\ b = 7$, iar $\overline{ab} = 27$.

430. Rezolvarea 1 O reprezentare grafică poate fi:

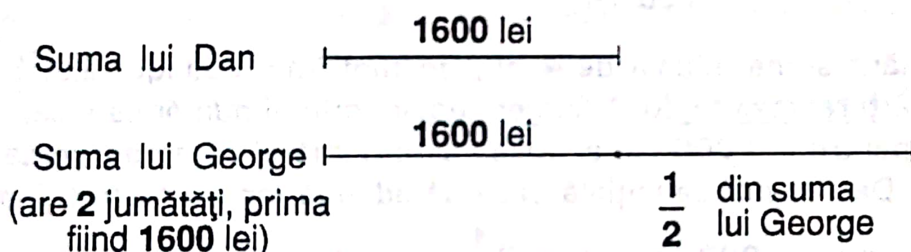


Dacă $\frac{1}{3}$ din ***I*** reprezintă cît $\frac{3}{4}$ din ***II***, atunci tot întregul ***I*** reprezintă cît **3·3** pătrimi din ***II***, adică ***I*** = **9** pătrimi din ***II***. Din desen rezultă că **9** pătrimi minus **4** pătrimi = **5** pătrimi din ***II***, care reprezintă **35** cm. Atunci: $II = 35 : 5 \cdot 4 = 28$ (cm), iar $I = 28 + 35 = 63$ (cm) sau $I = 35 : 5 \times 9 = 63$ (cm).

Rezolvarea 2 $\frac{1}{3}$ din $I = \frac{3}{4}$ din II $/ \times 3 \Rightarrow I = \frac{9}{4}$ din II, iar $I - II = 35$.

Obținem: $\frac{9}{4} \cdot II - II = 35 \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot II = 35 \Rightarrow II = 28$; $I = 63$.

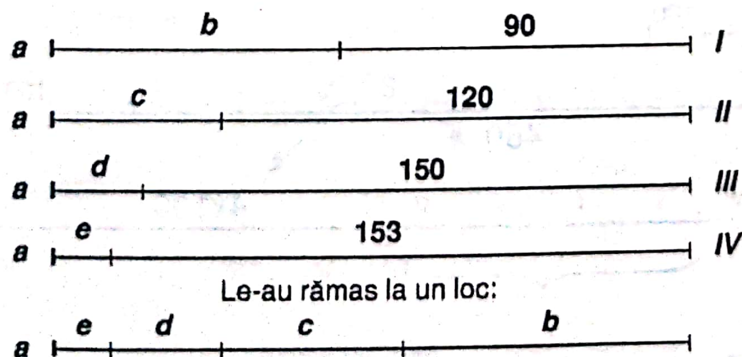
431. Într-o reprezentare grafică avem:



Dacă **1 600** lei reprezintă o jumătate din suma lui George, atunci acesta avea $2 \times 1\,600 = 3\,200$ lei.

432. Rezolvarea 1 Notăm suma inițială a fiecărui copil cu ***a***. În reprezentarea grafică, după delimitarea sumei cheltuite, rămîne în fiecare segment un rest, notat diferit: ***b***, ***c***, ***d*** și, respectiv, ***e***, adică:

Fiecare la început:

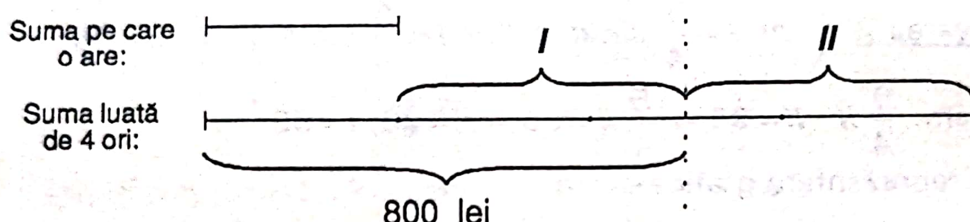


Din sumele rămase s-a putut reprezenta numai o singură parte egală cu suma inițială **a**. Cîte părți, fiecare egală cu **a**, au dispărut? 4 părți – 1 parte = 3 părți. Rezultă că 3 părți reprezintă tocmai sumele cheltuite de către cei patru copii. Cîți lei reprezintă cele 3 părți? 90 + 120 + 150 + 153 = 513 (lei). Cîți lei reprezintă o parte (cîți lei a avut fiecare copil la început)? 513 : 3 = 171 (lei).

<u>Rezolvarea 2</u> Păstrăm aceleași notații. Din enunț rezultă: $a-90=b \Rightarrow a=b+90$; $a-120=c \Rightarrow a=120+c$; $a-150=d \Rightarrow a=150+d$; $a-153=e \Rightarrow a=e+153$. În total cei patru copii au avut $4a$ lei, adică $4a=b+90+c+120+150+d+153 \Leftrightarrow 4a=513+\underbrace{b+c+d+e}_{a} \Rightarrow 4a=513+a/-a \Rightarrow$

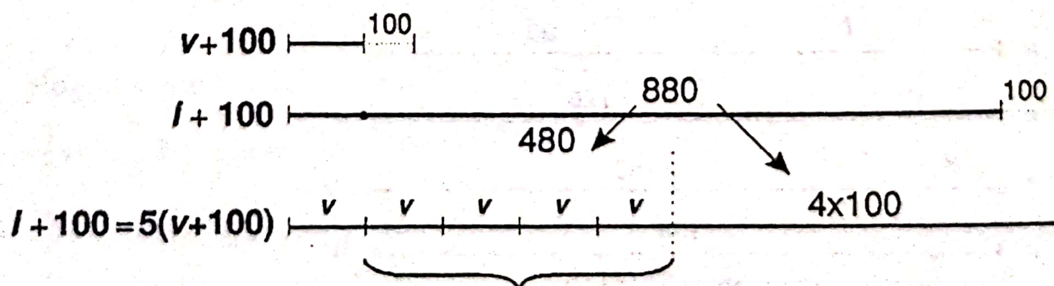
$3a=513 \Rightarrow a=513:3 \Rightarrow a=171$.

433. Reprezentarea grafică poate fi:



Cînd am mărit suma inițială de 4 ori, de fapt i-am adăugat alte 3 părți. Aceste 3 părți <u>reprezintă două numere egale</u>: primul număr este cel care ar mai trebui pentru a fi 800 lei; al doilea este numărul care depășește suma de 800 lei. Deci la partea inițială dacă se adaugă încă o parte și jumătate se obține suma de 800 lei, adică $2\frac{1}{2}$ părți, fiecare parte fiind egală cu suma inițială, reprezintă 800 lei. Cîți lei avea Rada? Dacă 5 jumătăți din sumă reprezintă 800 lei, o jumătate reprezintă 800 : 5 = 160 lei, iar suma este $2 \times 160 = 320$ lei. (Pentru alte soluții, a se vedea problema **IV.46** din volumul 1).

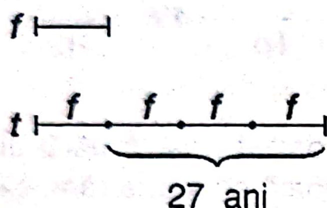
434. Notăm cu i suma Ioanei, cu v suma Verei. O reprezentare grafică poate fi:



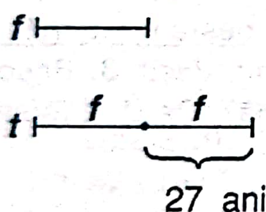
Rezultă $4v=880-400 \Rightarrow v=120$; $i=120+880=1\ 000$.

Sau: Păstrăm notaţiile de mai sus. Din enunţ rezultă: $i=v+880$, iar $5(v+100)=i+100 \Leftrightarrow 4v=480 \Rightarrow v=120$; $i=120+880 \Rightarrow i=1\ 000$.

435. În asemenea probleme diferenţa de vîrstă se păstrează, numai raportul se modifică (a se vedea observaţia de la **IV.2**, din volumul **1**).
Care este şi va fi diferenţa de vîrstă dintre tată şi fiu? $46-19=27$ (ani).
a) Ce vîrstă avea tatăl cînd fiul avea **13** ani? $27+13=40$ (ani) sau: Cu cîţi ani în urmă fiul avea **13** ani? $19-13=6$ (ani). Cîţi ani avea tatăl cu **6** ani în urmă? $46-6=40$ (ani).
b) Ce vîrstă va avea fiul cînd tatăl va avea **51** ani? $51-27=24$ (ani) sau: Peste cîţi ani tatăl va avea **51** ani? $51-46=5$ (ani). Ce vîrstă va avea fiul peste **5** ani? $19+5=24$ (ani).
c) O reprezentare grafică a raportului dintre vîrste poate fi:

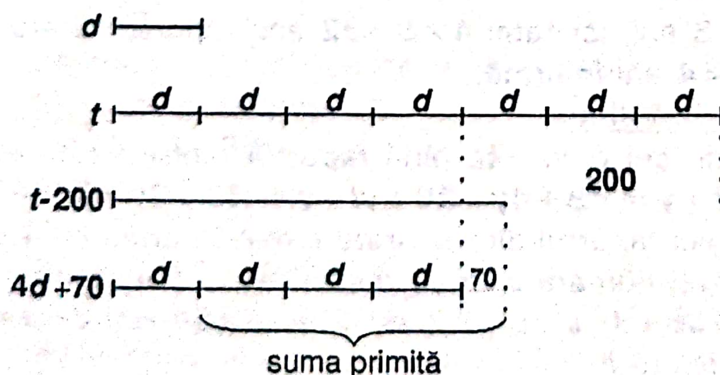


Rezultă că triplul vîrstei fiului (cînd raportul dintre vîrste era **4**) reprezintă **27** ani. Ce vîrstă avea fiul? $27 : 3=9$ (ani). Cu cîţi ani în urmă fiul avea **9** ani? $19-9=10$ (ani). Răspuns: cu **10** ani în urmă.
d) O reprezentare grafică a raportului dintre vîrste poate fi:



Rezultă că atunci cînd tatăl va avea de **2** ori vîrsta fiului, băiatul va avea **27** ani (o parte). Peste cîţi ani fiul va avea **27** ani? $27-19=8$ (ani). Răspuns: peste **8** ani.

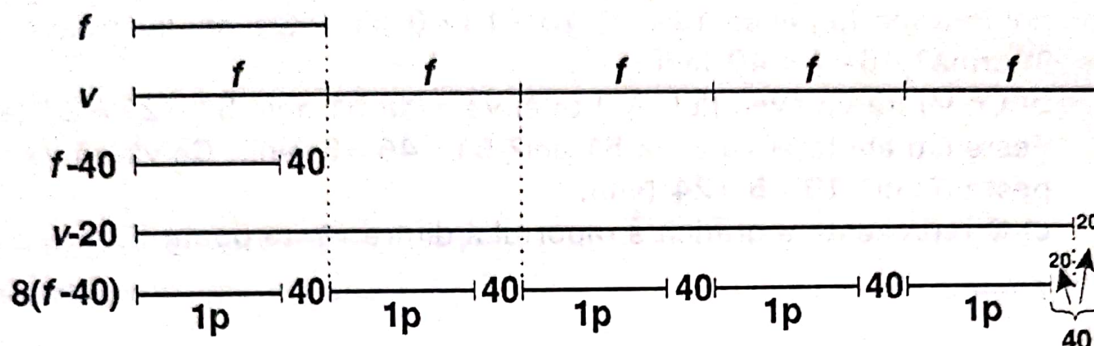
436. Notăm cu d suma lui Dany, cu t suma lui Tibi. O reprezentare grafică poate fi:



Din compararea ultimelor două reprezentări cu a doua rezultă: $3d=$

$=70+200 \Rightarrow d=90$ (lei); $t=7\times 90 \Rightarrow t=630$ (lei). Sau: $t=7d$; $t-200=$ $=4d+70 \Rightarrow 7d-200=4d+70 \Rightarrow 3d=270 \Rightarrow d=90$; $t=7\times 90 \Rightarrow t=630$.

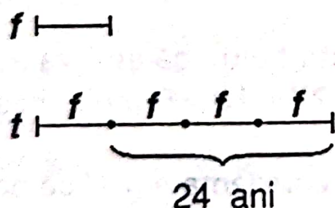
437. Este o problemă de diferență și dublu raport, ca și problema anterioară (a se vedea și **IV.27.** din vol.1). Notăm cu ***f*** suma Florinei, cu ***v*** suma lui Vlad. Grafic, modificările sumelor sînt:



Se observă că din suma rămasă lui Vlad s-au format doar **5** părți din cele **8** ale noului raport. Rezultă că **3** părți, fiecare egală cu suma rămasă Florinei, reprezintă $40+40+40+40+20=180$ lei. Cîți lei i-au rămas Florinei? $180 : 3=60$ (lei). Dar lui Vlad? $8\times 60=480$ (lei).

438. Pentru clasele a II-a – a V-a:

Care este raportul actual dintre vîrste? $36 : 12=3$. Dacă la fiecare vîrstă se adaugă un număr de ani (de exemplu $(36+2) : (12+2)=2{,}25$), raportul se micșorează, nu se mărește. Deci nu este posibil ca, peste un număr de ani (în viitor), raportul dintre vîrste să fie **4**, ci mai mic decît **3**. Raportul **4** dintre vîrste a fost în trecut. Cu cîți ani în urmă? Dacă diferența de $36-12=24$ ani se păstrează, rezultă:

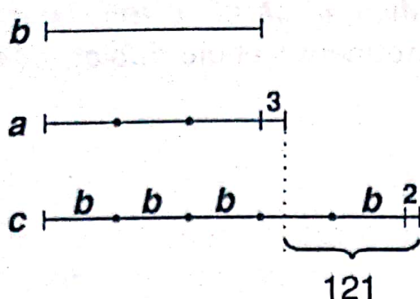


Cînd fiul avea $24 : 3=8$ ani, iar tatăl $4\times 8=32$ ani, raportul dintre vîrste era **4**, adică cu $12-8=4$ ani în urmă.

Pentru clasele a VI-a – a VIII-a:

Notăm cu ***y*** numărul de ani care trec pînă raportul dintre vîrste este **4**. Rezultă: $(12+y)\cdot 4=36+y \Rightarrow 48+4y=36+y/-y \Rightarrow 48+3y=36 \Rightarrow 3y=$ $=36-48 \Rightarrow y=-4$. Deci raportul dintre vîrste a fost în urmă cu **4** ani.

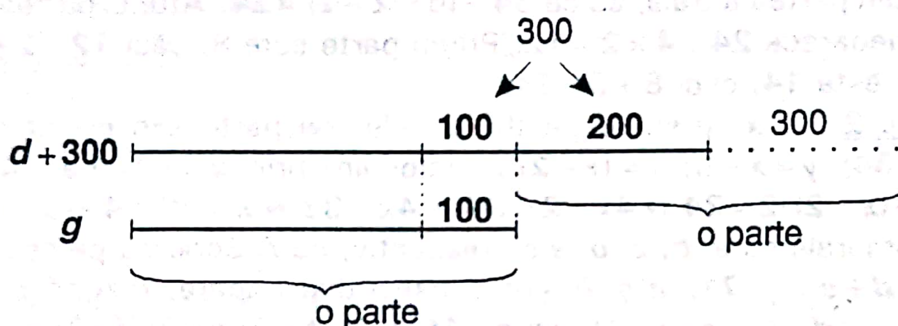
439. Rezolvarea 1 Fie cele trei numere ***a***, ***b*** și, respectiv, ***c***. Enunțul pe scurt: $a : b=3$ (rest 3) $\Rightarrow a=3b+3$; $c : b=5$ (rest 2) $\Rightarrow c=5b+2$; $c-a=121$.
Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă:
$121+3-2=2b \Rightarrow 2b=122 \Rightarrow b=61$; $a=3\times61+3 \Rightarrow a=186$;
$c=5\times61+2 \Rightarrow c=307$.
Sau: $5b+2-a=121 \Rightarrow 5b+2-3b-3=121 \Rightarrow 2b-1=121 \Rightarrow b=61$ etc.

440. Rezolvarea 1

Notăm cu d suma lui Dan, cu g suma lui George.
O reprezentare grafică poate fi:



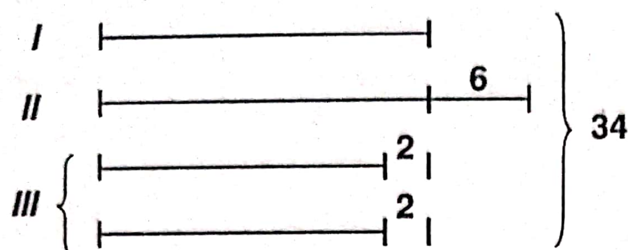
Rezultă că jumătate din suma pe care ar avea-o Dan, dacă ar mai primi **300** lei, este $300+(300-100)=500$, tocmai suma pe care o avea George.
Cîţi lei avea Dan? $500+200=700$ (lei).
Verificare: $(700+300):500=2$; $500-(700-300)=100$.

Rezolvarea 2

Din enunţ rezultă: $d+300=2g$; $d-300=g-100 \Rightarrow d=g+200$.
Atunci:
$g+200+300=2g \Rightarrow g+500=2g \Rightarrow g=500$, iar $d=2\times500-300 \Rightarrow d=700$.

441. Cît trebuia să primească fiecare dintre cei **4** copii? $100:4=25$.
Cît a primit fiecare?
I. $100:2=50$;
II. $100:4=25$;
III. $50:2=25$.
Se observă că $50=2\times25$. Deci mama ia **25** lei de la primul şi îi dă mezinului. (Sau: O jumătate are două sferturi. Deoarece al doilea şi al treilea au luat cîte un sfert, rezultă că mezinul şi cel mare împart cele două sferturi pe care le-a luat iniţial cel mare).

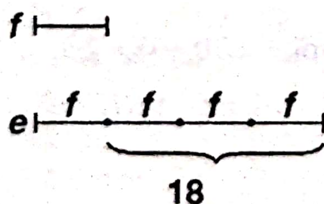
442. Rezolvarea 1 Pentru reprezentarea grafică a părţii a treia trebuie să micşorăm cu 6 prima parte, iar ceea ce obţinem trebuie dublat, adică:



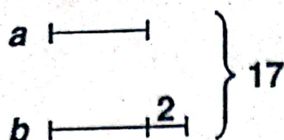
Se observă că dacă din a doua parte luăm 6, obţinem o parte egală cu prima. Dacă la fiecare parte din a treia mărime adăugăm cîte 2, obţinem alte două părţi, fiecare egală cu prima. Care este suma acestor părţi egale? $34-6+2+2=32$. Care este prima parte? $32:4=8$. Dar a doua? $8+6=14$. Dar a treia parte? $(8-2)\cdot 2=12$. Într-o altă variantă, dacă din suma 34 scădem 6, apoi 2 şi încă 2, obţinem 4 părţi, fiecare egală cu o jumătate din partea a treia, adică $34-(6+2+2)=24$. Atunci partea a treia este 12, deoarece $24:4\times 2=12$. Prima parte este 8, căci $12:2+2=8$, iar a doua este 14, căci $8+6=14$.

Rezolvarea 2 Fie x, y şi, respectiv, z cele trei părţi. Din enunţ rezultă: $x+y+z=34$; $y=x+6$; $z=(x-2)\cdot 2$. Înlocuim prin x în sumă, obţinînd: $x+x+6+(x-2)\cdot 2=34 \Leftrightarrow 4x+2=34 \Leftrightarrow 4x=32 \Leftrightarrow x=32:4 \Rightarrow x=8$ etc.

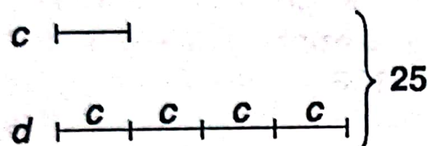
443. Notăm numerele cu a, b, c, d, e şi, respectiv, cu f. Scrierea pe scurt este: $a+b+c+d+e+f=71$; a şi b sînt consecutive impare; rezultă $b=a+2$; $c+d=25$, iar $d=4c$; $e-f=18$, iar $e=4f$; $a=?$; $b=?$; $c=?$; $d=?$; $e=?$; $f=?$ Observăm că informaţia despre primele două numere este insuficientă, căci avem numai diferenţa lor. Ne-ar mai trebui ceva. Ce anume? Poate suma lor, poate raportul lor etc. Din prima relaţie rezultă că împreună cu celelalte patru au suma 71. Dacă am da deoparte suma ultimelor patru numere, nu am putea afla suma lor? Ba da. Ştim însă suma ultimelor 4 numere? Nu. O putem afla? Numai dacă aflăm şi ultimele două numere. Din enunţ rezultă $e-f=18$, iar $e=4f$. Avem o problemă simplă de diferenţă şi raport. Putem reprezenta grafic astfel:



Din desen rezultă că $3f=18 \Leftrightarrow f=6$, iar $e=4\times 6=24$ sau $6+18=24$. Atunci $e+f=24+6=30$. Acum putem afla suma primelor două numere. Din 71 dăm deoparte suma ultimelor 4 numere, adică $71-25-30=$ $=46-30=16$ sau $71-(25+30)=71-55=16$. Putem reprezenta grafic relaţiile dintre primele două numere astfel:

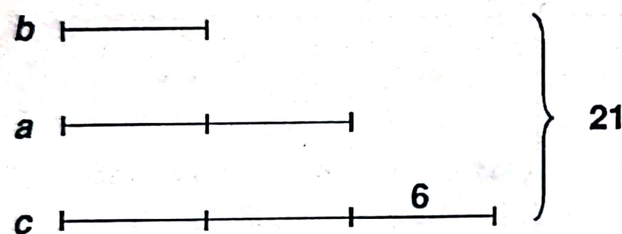


Din desen rezultă că $2a=16-2 \Leftrightarrow a=14:2 \Leftrightarrow a=7$, iar $b=7+2 \Rightarrow b=9$.
Trebuie să aflăm și numerele c și d.
(Se observă că, parcurgînd o cale sintetică, le puteam determina întîi pe acestea).
Dacă $c+d=25$, iar $d=4c$, rezultă:



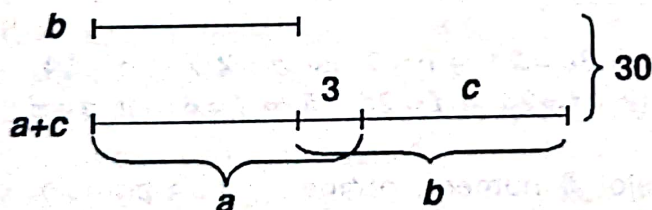
Din desen se observă că $5c=25 \Rightarrow c=5$, iar $d=4\cdot5=20$.

444. Reprezentarea grafică poate fi:

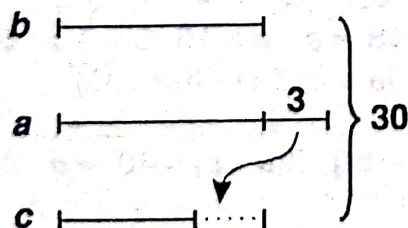


Rezultă că $5b=21-6 \Rightarrow b=3$, $a=6$, iar $c=2\cdot3+6 \Leftrightarrow c=12$.

445. Grafic, cele 3 numere se pot reprezenta astfel:



Cînd adăugăm pe al treilea în continuarea primului, obținem de 2 ori al doilea, adică $3+c=b$ sau:

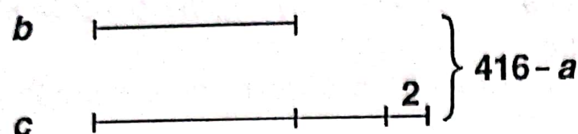


Putem privi suma 30 ca fiind organizată în 3 părți, fiecare egală cu numărul b. Atunci: $b=30:3 \Leftrightarrow b=10$; $a=10+3 \Leftrightarrow a=13$; $c=30-10-13 \Leftrightarrow c=7$ sau $c=10-3 \Leftrightarrow c=7$.

446. Notăm numerele cu a, b și, respectiv, c.

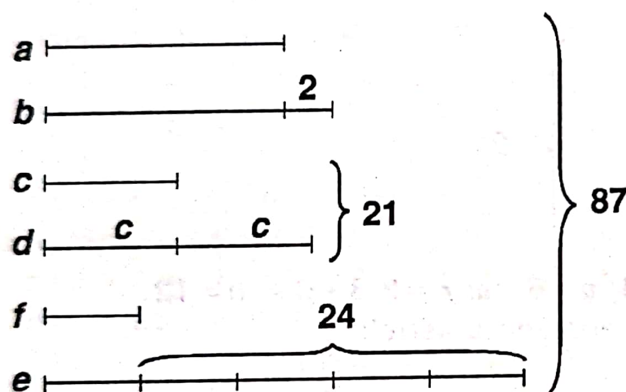
Din enunț rezultă: $a+b+c=416$; $b+c=3a$; $c-b=\frac{1}{2}b+2 \Leftrightarrow c=\frac{3}{2}b+2$.

Grafic, putem reprezenta astfel:



Deoarece $b+c=3a$, rezultă că în sumă avem $a+3a=416 \Rightarrow a=104$, iar $b+c=416-104 \Rightarrow b+c=312$. Din reprezentarea grafică rezultă că 5 părți, fiecare parte fiind egală cu jumătate din b, reprezintă $312-2$, iar $b=$ $=310:5\times 2 \Rightarrow b=124$; $c=3\times 62+2 \Rightarrow c=188$.

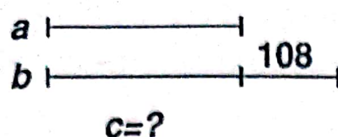
447. Scrierea pe scurt a problemei este:
$a+b+c+d+e+f=87$; $b=a+2$; $c+d=21$; $d=2c$; $e-f=24$; $e=5f$.
$a=?$; $b=?$; $c=?$; $d=?$; $e=?$; $f=?$ Reprezentarea grafică poate fi:



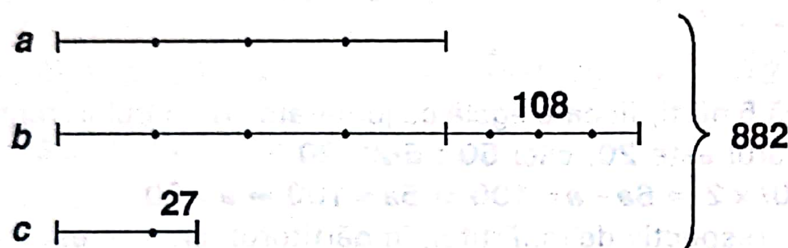
Din $c+d=21$ și $d=2c$, rezultă $3c=21 \Rightarrow c=7$, iar $d=2\cdot 7 \Leftrightarrow d=14$.
Din $e-f=24$ și $e=5f$ rezultă $4f=24 \Rightarrow f=24:4 \Leftrightarrow f=6$, iar $e=6\times 5 \Leftrightarrow$ $e=30$; $e+f=36$.
Scăzînd din 87 suma ultimelor 4 numere, obținem suma primelor două numere, adică: $a+b=87-(21+36) \Leftrightarrow a+b=87-57 \Leftrightarrow a+b=30$
$2a=30-2 \Leftrightarrow 2a=28 \Rightarrow a=28:2 \Leftrightarrow a=14$, $b=14+2 \Leftrightarrow b=16$.

448. Rezolvarea 1 Notăm numerele cu a și, respectiv, b.
a) Din enunț rezultă: $3a+3b=150 \Leftrightarrow 3(a+b)=150 \Rightarrow a+b=50$.
$2(3a-3b)=96 \Leftrightarrow 3a-3b=48 \Rightarrow 3(a-b)=48 \Rightarrow a-b=16$. Dacă $a+b=50$, iar $a-b=16$, rezultă (o problemă simplă, de sumă și diferență):
$2b=50-16 \Rightarrow b=17$, iar $a=33$.
b) Din enunț rezultă: $3a+3b=150 \Rightarrow a+b=50$; $2(a-b)=40 \Rightarrow a-b=20$.
Atunci $2b=30 \Rightarrow b=15$, iar $a=35$.
Rezolvarea 2 Din $3a+3b=150$ și $3a-3b=96:2 \Leftrightarrow 3a-3b=48$ rezultă (o problemă simplă de sumă și diferență): $3a=(150+48):2 \Leftrightarrow 3a=198:2 \Leftrightarrow$ $3a=99$, iar $a=99:3 \Leftrightarrow a=33$; $3b=(150-48):2 \Leftrightarrow 3b=102:2 \Leftrightarrow$ $3b=51$, iar $b=51:3 \Leftrightarrow b=17$.

449. Notăm numerele cu a, b și, respectiv, cu c.
Rezolvarea 1 Din enunț rezultă:



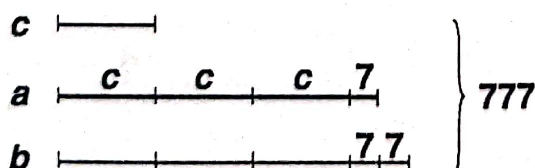
Pentru reprezentarea grafică a lui c trebuie să împărțim pe b în 4 părți la fel de mari, iar pentru a se obține în sumă 9 părți, fiecare egală cu c, adăugăm 108 la a. Care este suma a 9 părți, fiecare egală cu c? $882+108=990$. Cît este c? $990 : 9=110$. Care este al doilea număr? $4\times 110=440$. Care este primul număr? $440-108=332$.
Rezolvarea 2 Deoarece 108 se împarte exact la 4, putem reprezenta grafic al treilea număr ca un sfert din a plus un sfert din 108, adică 27:



Dacă scădem din sumă 108 și 27, obținem 9 părți fiecare egală cu un sfert din primul număr, adică $882-(108+27)=882-135=747$.
Deci un sfert din primul număr este 83, adică $747 : 9=83$.
Care este primul număr? $4\times 83=332$.
Care este al doilea număr? $332+108=440$.
Care este al treilea număr? $440 : 4=110$ sau $83+27=110$.

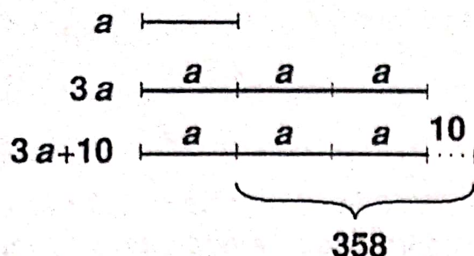
450. Notăm numerele cu a, b și, respectiv, cu c.
Din enunț rezultă: $a+b+c=852$; $3c+204=852$; $a-b=8$.
Din a doua egalitate rezultă că $c=(852-204) : 3 \Leftrightarrow c=216$.
Atunci $a+b=852-216 \Leftrightarrow a+b=636$, iar $a-b=8$.
Rezultă $b=(636-8) : 2 \Rightarrow b=314$, iar $a=322$.

451. Notăm numerele naturale cu a, b și, respectiv, cu c.
Din enunț rezultă: $a+b+c=777$; $a=3c+7$; $b=a+7$.
Reprezentarea grafică poate fi:



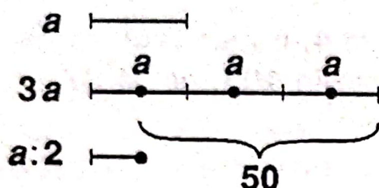
Din reprezentarea grafică rezultă: $7c=777-7-2\cdot 7 \Rightarrow 7c=756 \Rightarrow c=108$.
$a=3\cdot 108+7 \Leftrightarrow a=331$; $b=331+7 \Leftrightarrow b=338$.
Sau Deoarece $a=3c+7$, iar $b=a+7$, rezultă $b=3c+7+7$, iar $a+b+c=$
$=(3c+7)+(3c+14)+c \Rightarrow 7c+21=777 \Leftrightarrow c=108$ etc.

452. Reprezentarea grafică:



Din desen rezultă că $a=(358-10):2 \Leftrightarrow a=174$.

453. Reprezentarea grafică:

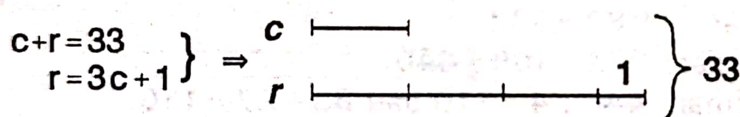


Din desen rezultă că 5 părți, fiecare egală cu jumătatea numărului, reprezintă 50. Atunci numărul este 20, căci $50:5\cdot 2=20$

Sau: $3a-a:2=50/\times 2 \Leftrightarrow 6a-a=100 \Leftrightarrow 5a=100 \Rightarrow a=20$.

454. Notăm cu a, b, c, r, respectiv deîmpărțitul, împărțitorul, cîtul și restul acestei împărțiri. Atunci: $a:b=c$, $r\neq 0$, adică $a=b\cdot c+r$, iar $c+r=33$, în care $r=3c+1$ și $r<b$.

Rezolvarea 1 Grafic:



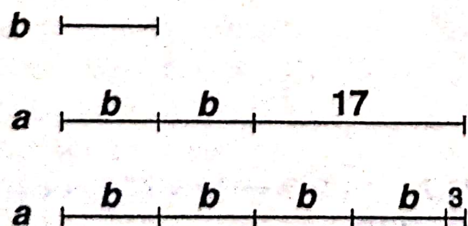
$4c=33-1 \Rightarrow c=8$, iar $r=3\times 8+1 \Leftrightarrow r=25$; $a=b\cdot 8+25$, dar $b>25$. Pentru a minim, $b=26$; deci $a=26\times 8+25 \Leftrightarrow a=233$.

Rezolvarea 2 Din $a=b\cdot c+r$, în care $r=3c+1$ și $r<b$, rezultă: $c+3c+1=33 \Rightarrow 4c=32 \Rightarrow c=8$; $a=8\cdot b+3\cdot 8+1 \Leftrightarrow a=8b+25$. Pentru a minim, $b=26$. Deci $a=26\cdot 8+25 \Leftrightarrow a=233$.

455. 1) Din enunț rezultă că $a>b$.

Deci $a:b=4$, rest $3 \Rightarrow a=4b+3$ și $a=2b+17$.

Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă că $2b+3=17$, adică $2b=14$. Atunci $b=7$, iar $a=2\cdot 7+17 \Leftrightarrow a=31$ sau $a=4\cdot 7+3 \Leftrightarrow a=31$. Într-o altă variantă de

rezolvare, putem scrie: $4b+3=2b+17/-2b \Rightarrow 2b+3=17 \Rightarrow 2b=17-3 \Leftrightarrow b=7$; $a=4 \cdot 7+3 \Leftrightarrow a=31$.

2) $a=2b$ și $a=b-34+100 \Leftrightarrow a=b+100-34 \Leftrightarrow a=b+66$.

Reprezentarea grafică poate fi:

b |———|

a |— b —|— b —|

a |— b —|— 66 —|

Din desen rezultă că $b=66$, iar $a=2 \cdot 66=132$. Într-o altă variantă de rezolvare, putem scrie: $a=2b$ și $a=b-34+100 \Rightarrow 2b=b-34+100 \Leftrightarrow 2b=b+100-34 \Leftrightarrow 2b=b+66/-b \Rightarrow b=66$; $a=2 \cdot 66=132$.

3) Din enunț rezultă: $b=2 \cdot (a+2)+3 \Leftrightarrow b=2a+4+3 \Leftrightarrow b=2a+7$; $b=3a-1$. Reprezentarea grafică poate fi:

a |———|

b |— a —|— a —|— 7 —|

3a |— a —|— a —|— a —|

3a-1 |— a —|— a —|— 1 —|

Din desen rezultă că $a=7+1=8$, iar $b=2 \cdot 8+7=23$ sau $3 \times 8-1=23$.

456. Fie a suma lui Dinu și b suma Cameliei. Din enunț rezultă: $a=b+16$ și $a : b=2$, rest $1 \Rightarrow a=2b+1$. Reprezentarea grafică poate fi:

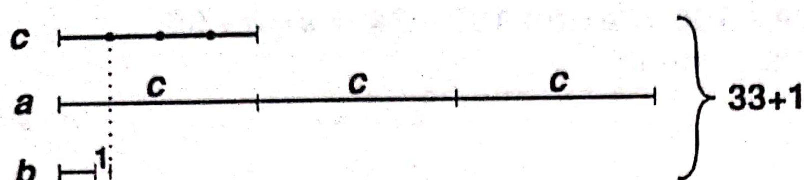
b |———|

a |— b —|— b —|— 1 —|

a |— b —|——— 16 ———|— 1 —|

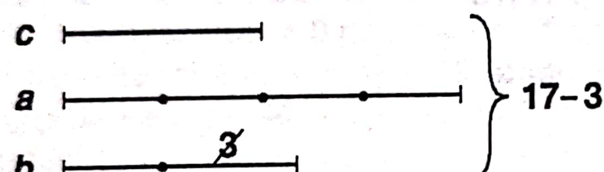
Din desen rezultă că $b+1=16 \Rightarrow b=15$, iar $a=2 \cdot 15+1=31 \Rightarrow a=31$ sau $a=15+16 \Rightarrow a=31$. Într-o altă variantă de rezolvare, putem scrie: $b+16=2b+1/-b \Rightarrow 16=b+1 \Rightarrow b=16-1 \Leftrightarrow b=15$; $a=15+16 \Leftrightarrow a=31$.

457. Fie numerele a, b și c. Din enunț rezultă: $a=3c$, $b+1=c:4$, iar $a+b+c=33$. Reprezentarea grafică poate fi:



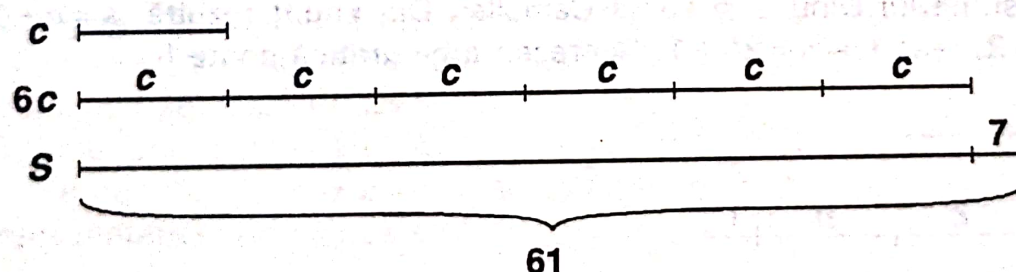
Din desen rezultă că 17 părți, fiecare egală cu $b+1$, reprezintă 34. Atunci $b+1=34:17 \Leftrightarrow b+1=2$, iar $b=2-1=1$. Rezultă $c=4\cdot(1+1) \Rightarrow c=8$, iar $a=3\cdot 8 \Leftrightarrow a=24$. Într-o altă variantă de rezolvare (poate fi și grafică), reținem că: $c:4=b+1$. Dacă privim pe c ca deîmpărțit, pe $b+1$ ca rezultat (cît), putem scrie: $c=4\cdot(b+1) \Rightarrow c=4b+4$. Luăm apoi și relația $a=3c$. Vom obține: $17b=33-4\times 4 \Rightarrow 17b=17 \Rightarrow b=1$ etc.

458. Din enunț rezultă: $a+b+c=17$, $a=2c$, iar $b=a:4+3$.
Reprezentarea grafică poate fi:

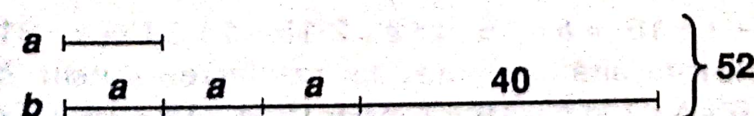


Din desen rezultă că 7 părți, fiecare egală cu $b-3$, reprezintă $17-3=14$. Atunci $b-3=14:7 \Rightarrow b-3=2 \Rightarrow b=5$ și $c=2\cdot 2=4$, iar $a=2\cdot 4=8$. Într-o altă variantă de rezolvare, înlocuiți în sumă pe a și b prin c. Veți obține: $4c+2c+c=28 \Leftrightarrow 7c=28 \Leftrightarrow c=4$ etc.

459. Fie numerele a, b, c, iar suma S.
Din enunț rezultă: $a+b+c=3\cdot 2c+7 \Leftrightarrow S=6c+7 \Leftrightarrow 61=6c+7$;
$b=3a+40$.
Reprezentarea grafică a primelor două relații poate fi:

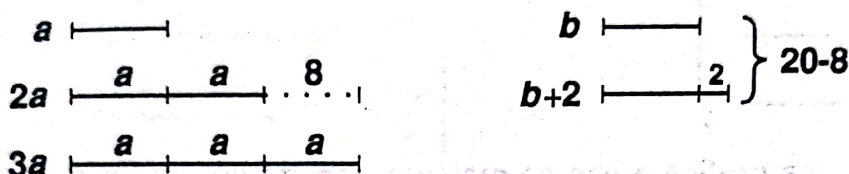


Din desen rezultă că $6c=61-7 \Leftrightarrow 6c=54$, deci $c=9$.
Pentru primele două numere, avem: $a+b=61-9 \Leftrightarrow a+b=52$, iar $b=3a+40$.
Rezultă reprezentarea grafică:

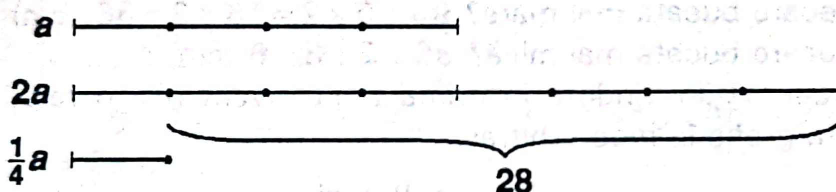


Din desen rezultă:
$4a=52-40 \Leftrightarrow 4a=12 \Rightarrow a=3$, iar $b=3 \cdot 3+40 \Leftrightarrow b=49$.
Într-o altă variantă de rezolvare, reținem că:
$a+b+c=6c+7 \Leftrightarrow 61=6c+7 \Rightarrow 6c=61-7 \Leftrightarrow 6c=54 \Rightarrow c=54 : 6 \Rightarrow c=9$.
Dacă $a+b+c=61 \Rightarrow a+b+9=61 \Rightarrow a+b=52$, în care $b=3a+40$.
Deci $a+(3a+40)=52 \Rightarrow 4a+40=52 \Leftrightarrow 4a=12 \Rightarrow a=12 : 4 \Rightarrow a=3$,
iar $b=52-3 \Leftrightarrow b=49$.

460. Din enunț rezultă $2a+8=3a \Leftrightarrow a=8$, iar $8+b+(b+2)=20 \Rightarrow 2b=20-10 \Rightarrow b=10 : 2 \Rightarrow b=5$, iar $b+2=5+2=7$.
Reprezentările grafice pot fi:

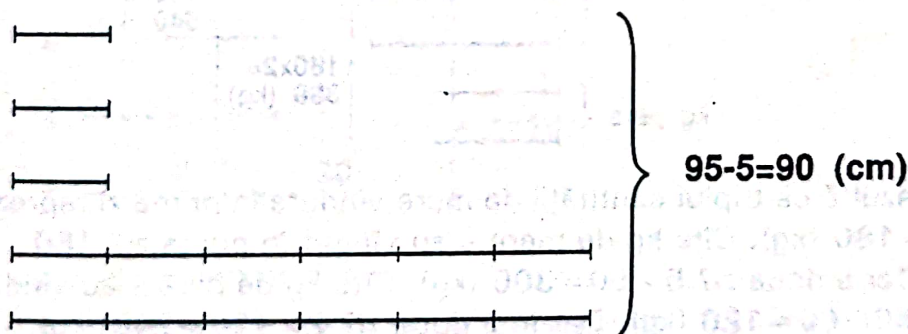


461. Fie acel număr natural *a*.
Reprezentarea grafică poate fi:



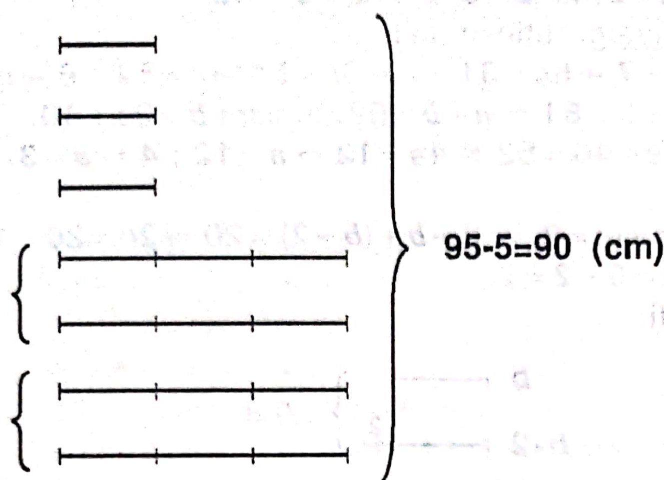
Din desen rezultă că 7 părți, fiecare egală cu sfertul lui *a*, reprezintă 28.
Atunci un sfert este 4, căci $28 : 7=4$, iar $a=4 \times 4=16$.

462. Rezolvarea 1
Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă că 15 părți, fiecare egală cu o bucată mai mică, reprezintă 90 cm.
1) Cîți cm are fiecare bucată mică? $90 : 15=6$ (cm)
2) Cîți cm are fiecare bucată mai mare? $6 \times 3 \times 2=36$ (cm)

Rezolvarea 2

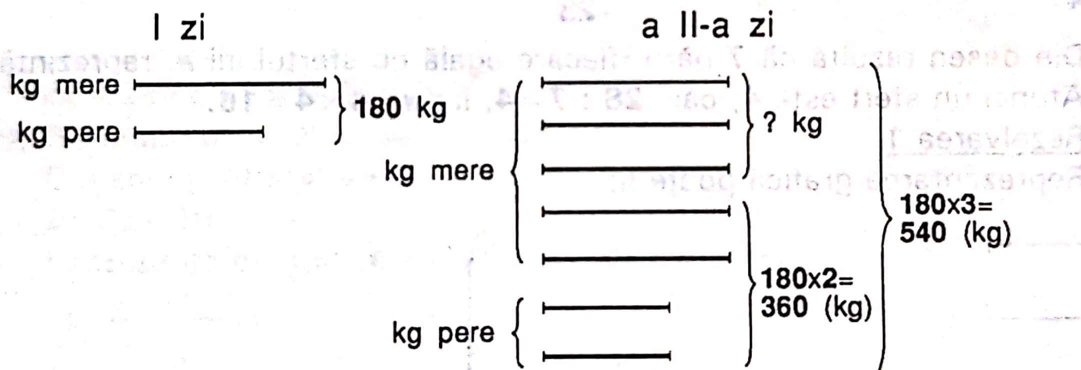


Dacă reprezentarea grafică e cea de mai sus, rezultă că putem privi suma de **90** cm ca fiind organizată în **5** părți, fiecare egală cu o jumătate dintr-o bucată mai mare.

1) Cîți cm are fiecare bucată mai mare? **90 : 5 × 2 = 18 × 2 = 36** (cm)

2) Cîți cm are fiecare bucată mai mică? **36 : 2 : 3 = 6** (cm)

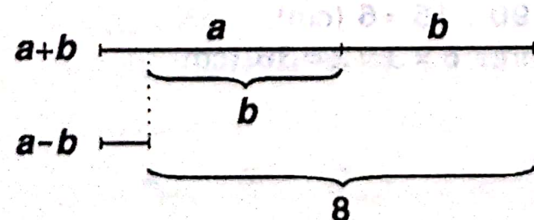
463. Deoarece între cantitățile vîndute în prima zi nu avem nici o relație, le putem reprezenta grafic în mod arbitrar:



Din desen rezultă că triplul cantității de mere vîndute în prima zi reprezintă **540 − 360 = 180** (kg). Cîte kg de mere s-au vîndut în prima zi? **180 : 3 = = 60** (kg). Dar a doua zi? **5 × 60 = 300** (kg). Cîte kg de pere s-au vîndut în prima zi? **180 − 60 = 120** (kg). Dar în a doua zi? **2 × 120 = 240** (kg).

464. Pe scurt: $a+b=a-b+8$, iar $a \cdot b=20$

Rezolvarea 1



Din desen rezultă că $2b=8$, iar $b=4$. Atunci $a\times 4=20$, iar $a=5$.

Rezolvarea 2

$a+b=a-b+8/+b \Rightarrow a+2b=a+8/-a \Rightarrow 2b=8 \Rightarrow b=4$. Dacă $4\cdot a=20 \Rightarrow a=5$.

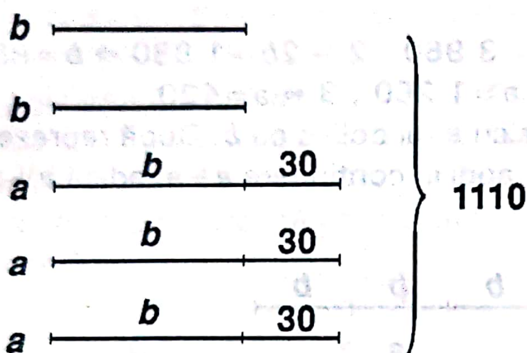
465. Din formularea ultimei părţi a enunţului, rezultă că pot exista două soluţii: $a>b$ şi $a<b$.

Rezolvarea 1

Varianta 1

Dacă $a>b$, rezultă $3(a-b)=90 \Rightarrow a-b=30$.

O reprezentare grafică pentru $3a+2b$ poate fi:

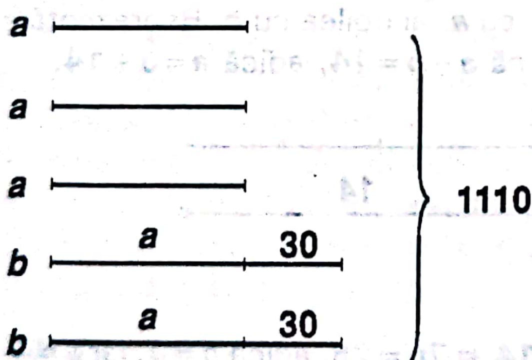


$1\ 110=3a+2b \Rightarrow 5b+90 \Rightarrow 5b=1\ 110-90 \Rightarrow b=1\ 020 : 5 \Rightarrow b=204$; $a=234$.

Varianta 2

Dacă $a<b$, rezultă $3(b-a)=90 \Rightarrow b-a=30$.

O reprezentare grafică pentru $3a+2b$ poate fi:



$1\ 110=3a+2b=5a+60 \Rightarrow 5a=1\ 110-60 \Rightarrow a=1\ 050 : 5 \Rightarrow a=210$; $b=240$.

Rezolvarea 2 (Comparaţie prin eliminare)

Varianta 1

$\left.\begin{matrix}3a+2b=1\ 110\\ 3a-3b=90\end{matrix}\right\} \Rightarrow 5b=1\ 020 \Rightarrow b=204$; $a=(90+3\cdot 204) : 3=234$.

Varianta 2

$\left.\begin{matrix}3a+2b=1\ 110\\ 3b-3a=90\end{matrix}\right\} \Rightarrow 5b=1\ 200 \Rightarrow b=240$; $a=210$.

466. Din formularea condiţiei referitoare la diferenţă rezultă că pot exista două soluţii:

1) $3a-2b=720$ sau $2b-3a=720$

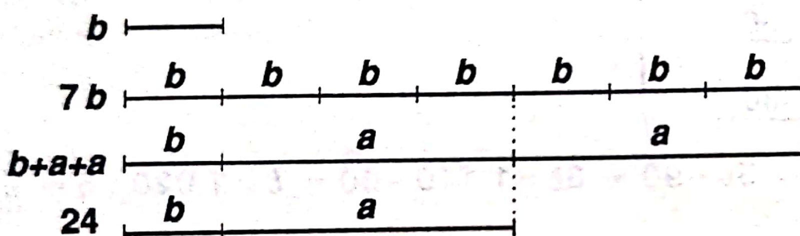
$\left.\begin{array}{l}3a+2b=3\,240\\3a-2b=720\end{array}\right\} \Rightarrow 6a=3\,960 \Rightarrow a=660;\ b=(1\,980-720):2 \Leftrightarrow b=630.$

Sau: Se observă că este o problemă de sumă şi diferenţă.
Deci $3a=(3\,240+720):2 \Leftrightarrow 3a=3\,960:2 \Leftrightarrow 3a=1\,980 \Rightarrow a=660;$
$b=(3\,240-3\cdot660):2 \Leftrightarrow b=1\,260:2 \Leftrightarrow b=630.$

2) $\left.\begin{array}{l}2b+3a=3\,240\\2b-3a=720\end{array}\right\} \Rightarrow 4b=3\,960 \Rightarrow b=990;\ a=(3\,240-2\cdot990):3 \Leftrightarrow$ $a=420.$

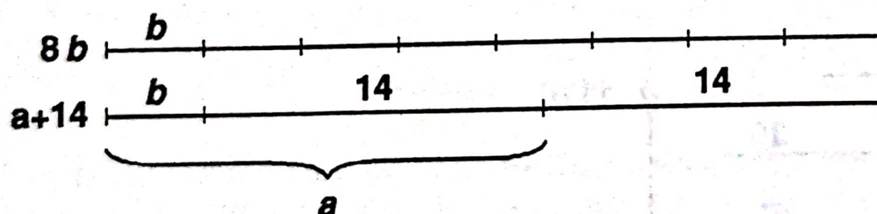
Sau: $2b=(3\,240+720):2 \Leftrightarrow 2b=3\,960:2 \Leftrightarrow 2b=1\,980 \Rightarrow b=990;$
$3a=990\cdot2-720 \Leftrightarrow 3a=1\,260 \Rightarrow a=1\,260:3 \Leftrightarrow a=420.$

467. Rezolvarea 1 Notăm primul număr cu a, al doilea cu b. După reprezentarea grafică a lui $7b$, reprezentăm un b, apoi în continuare $a+a$, adică $a+(a+b)$:



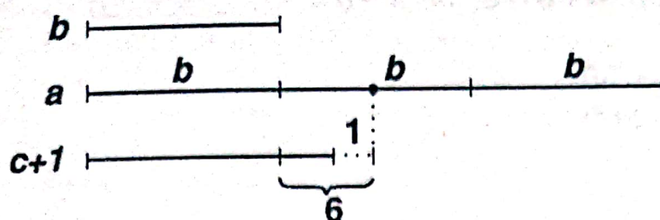
Din desen rezultă $b+3b=24$, adică $b=6$, iar $a=3\times6 \Leftrightarrow a=18.$
Rezolvarea 2 Pe scurt, relaţiile din enunţ: $a+b=24$, iar $a+a+b=7b \Leftrightarrow$ $2a=6b \Rightarrow a=3b$. Deci $3b+b=24$, adică $b=6$, iar $a=18$.

468. Rezolvarea 1 Notăm primul număr cu a, al doilea cu b. Reprezentăm grafic $8b$, iar apoi, ţinînd cont de faptul că $a-b=14$, adică $a=b+14$.



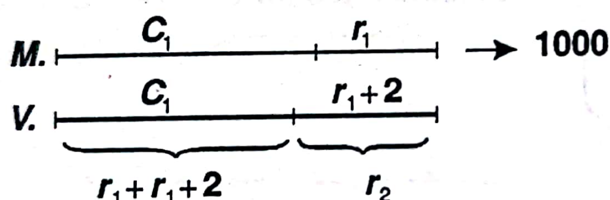
Din desen rezultă că $8b=b+14+14 \Leftrightarrow 7b=28$, adică $b=4$, iar $a=4+14 \Leftrightarrow$ $a=18.$
Rezolvarea 2 Dacă $a-b=14$, iar $a+14=8b$, rezultă $a=b+14$, iar $b+14+14=8b \Leftrightarrow 28=7b \Rightarrow b=4;\ a=18.$

469. Rezolvarea 1 Din enunţ rezultă: $a:b=3 \Rightarrow a=3b$, deci $a>b$; $c+1=a:2$ şi $c+1=b+6$. Reprezentarea grafică poate fi:



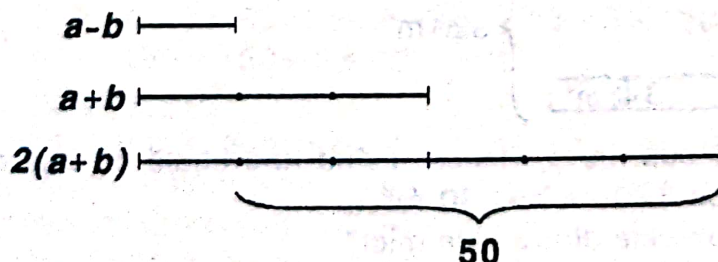
Din desen rezultă că o jumătate din a este b plus o jumătate din b, iar 6 reprezintă jumătate din b. Atunci: $b=?$ $b=2\times6=12$; $a=3\times12=36$; $c=36:2-1=17$ sau $12+(6-1)=17$; $a+c=?$ $36+17=53$.
Sau: 6 reprezintă a șasea parte din a, fiind o jumătate dintr-o treime din a. Atunci $a=6\times6=36$; $b=36:3 \Leftrightarrow b=12$, iar $c=36:2-1=17$. $a+c=36+17=53$.
Rezolvarea 2 Dacă $a=3b$, iar $c+1=a:2$, rezultă $c+1=3b:2$. Dacă $c+1=b+6$, rezultă $3b:2=b+6 \Leftrightarrow 3b=2(b+6) \Leftrightarrow 3b=2b+12 \Rightarrow b=12$; $a=3\times12 \Leftrightarrow a=36$; $c=36:2-1=17$.

470. O reprezentare grafică pentru sumele cheltuite și pentru cele primite ca rest poate fi:



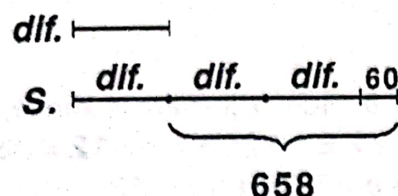
Din desen rezultă că suma pe care a avut-o Viorica poate fi organizată în 3 părți, fiecare egală cu suma rămasă lui Mihai, plus 4 lei, adică: $3r_1+4=1\,000$. Cîți lei i-au rămas lui Mihai? $(1\,000-4):3=332$ (lei). Cîți lei a cheltuit Mihai? $1\,000-332=668$ (lei). Cîți lei a cheltuit Viorica? Dacă i-au rămas mai mult cu 2 lei decît lui Mihai, rezultă că a cheltuit cu 2 lei mai puțin, adică $668-2=666$ (lei) sau $1\,000-(332+2)=666$ (lei).

471. Notăm cu a primul număr, cu b al doilea număr. Reprezentarea grafică a sumei și a diferenței poate fi:



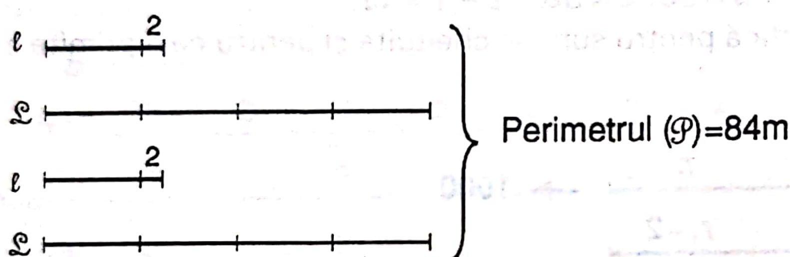
Din desen rezultă că 5 părți, fiecare fiind egală cu $a-b$, reprezintă 50. Care este diferența? $50:5=10$. Care este suma? $3\times10=30$.
Rezultă $b=(30-10):2=10$; $a=30-10=20$.

472. Fie a și b cele două numere, $a+b=S$, iar $a-b=dif.$
Din enunț rezultă:
$S=dif.+658$, iar $S=3dif.+60$.
O reprezentare grafică poate fi:

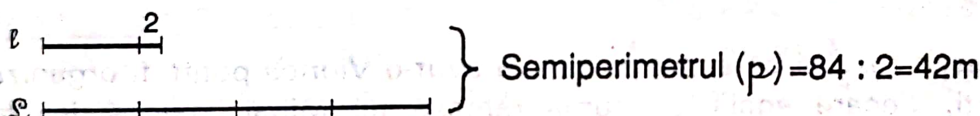


Din desen rezultă că diferența este $(658-60):2=299$, iar suma este $299+658=957$ sau $3\times 299+60=957$.
După o nouă posibilă reprezentare grafică a numerelor a și b, obțineți $b=329$, iar $a=628$.

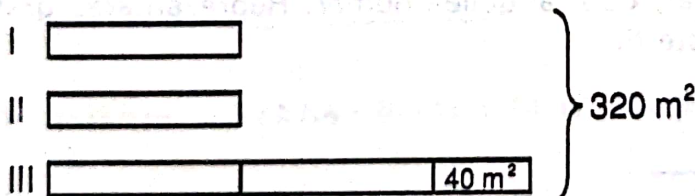
473. Reprezentarea grafică a dimensiunilor dreptunghiului poate fi:



sau:



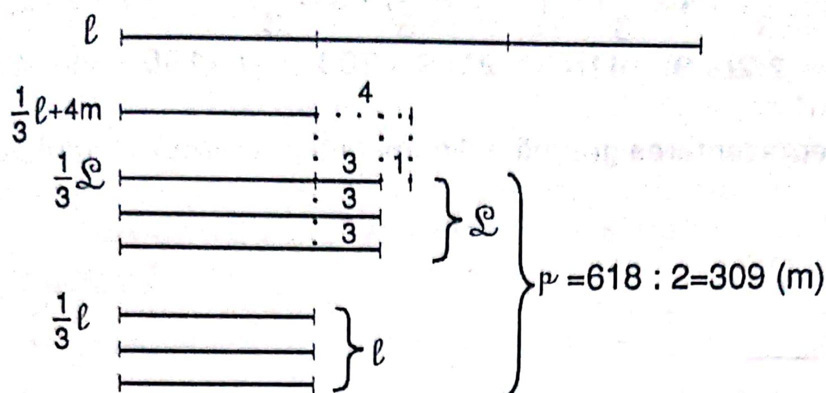
Din desene rezultă că $10(l-2)=84-(2+2) \Rightarrow l-2=8$ (m) sau $5(l-2)=42-2 \Rightarrow l-2=8$, iar $L=4\times 8=32$ (m).
Aria dreptunghiului este $32\times 10=320$ (m^2).
Reprezentarea grafică a suprafeței fiecărei parcele poate fi:



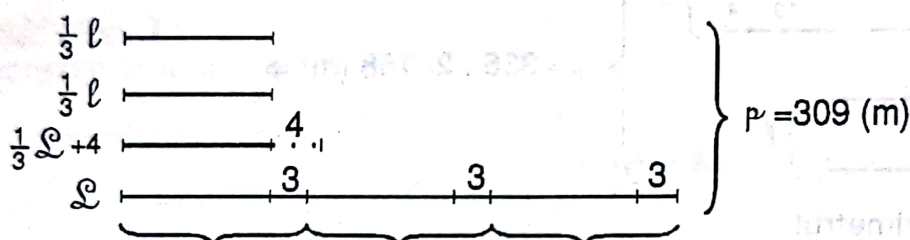
Din desen rezultă că 4 suprafețe, fiecare avînd aria egală cu una dintre parcelele mici, au aria de $320-40=280$ m^2.
Care este aria fiecărei parcele dintre cele mici?
$280 : 4=70$ (m^2).
Care este aria parcelei mari?
$2\times 70+40=180$ (m^2).

474. <u>Rezolvarea 1</u>

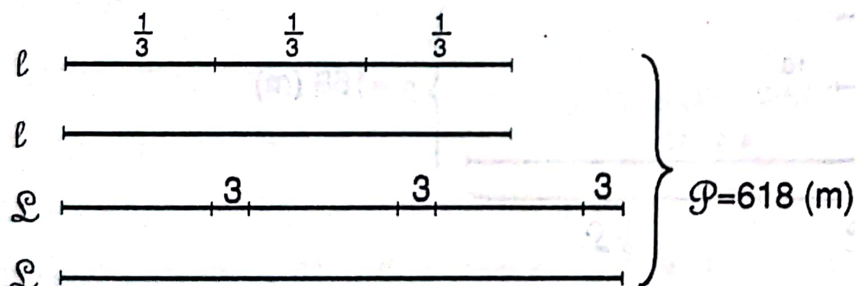
Reprezentarea grafică a dimensiunilor dreptunghiului poate fi:



sau:



sau:



Din desen rezultă că **6** părţi, fiecare parte fiind egală cu o treime din lăţime, reprezintă **309 − (3 + 3 + 3) = 300** (m); ***l*** **= 300 : 6 × 3 = 150** (m); ***L*** **= (50 + 3) × 3 = 53 × 3 = 159** (m); aria **= 150 × 159 = 23 850** (m^2)

<u>sau</u>: **12** părţi, fiecare parte fiind egală cu o treime din lăţime, reprezintă **618 − 6 × 3 = 600** (m); ***l*** **= 600 : 12 × 3 = 150** (m); ***L*** **= (50 × 3) × 3 = 159** (m); aria **= 159 × 150 = 23 850** (m^2).

<u>Rezolvarea 2</u>

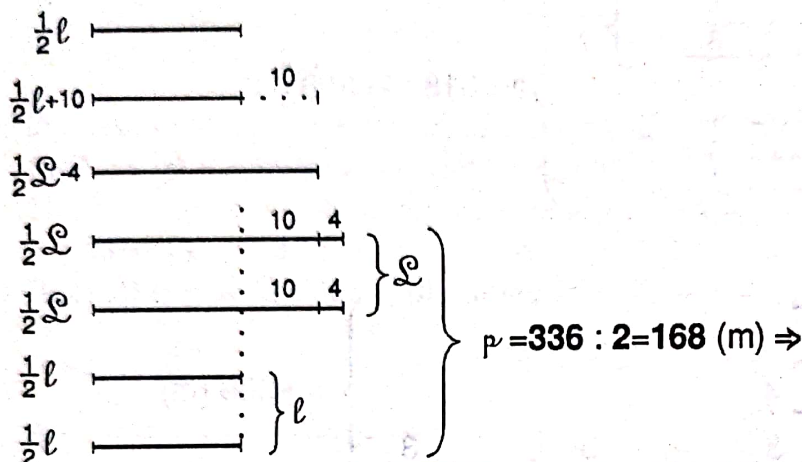
Dacă prin adăugarea a **4** m la o treime din lăţime se obţine cu **1** m mai mult decît o treime din lungime, rezultă că o treime din lăţime este cu **4 − 1 = 3** m mai mică decît o treime din lungime, iar toată lăţimea (**3** treimi) este cu **3 × 3 = 9** m mai mică decît toată lungimea (**3** treimi).

De aici, avem o problemă de sumă şi diferenţă, adică: ***l*** **+** ***L*** **= 618 : 2 = 309**, iar ***L*** **=** ***l*** **+ 9**, de unde rezultă că **2·*l* = 300**, iar ***l*** **= 150** m; ***L*** **= 159** m; aria **= 23 850** m^2.

Rezolvarea 3

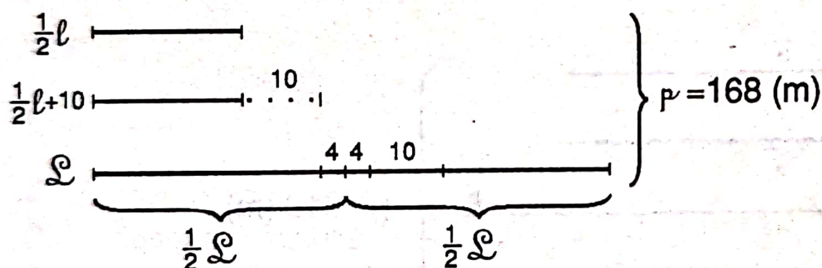
Din enunț rezultă: $\frac{1}{3}L+4=\frac{1}{3}L+1l-1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}l+3=\frac{1}{3}L/\times 3 \Leftrightarrow l+9=L$; atunci $2(L+l)=618 \Rightarrow 2(2l+9)=618 \Rightarrow 2l+9=309 \Rightarrow l=150$, iar $L=159$; aria $=23\ 850\ m^2$.

475. Rezolvarea 1 Reprezentarea grafică a dimensiunilor dreptunghiului poate fi:

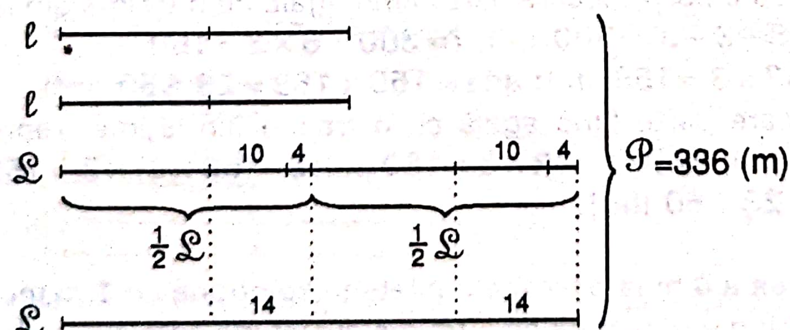


⇒ semiperimetrul

sau:



sau:



Din desen rezultă că 4 părți, fiecare parte fiind egală cu o jumătate din lățime, reprezintă $168-(10+10+4+4)=140$ m; $l=140 : 4\times 2=70$ (m); $L=(35+14)\times 2=98$ (m); sau: 8 părți, fiecare parte fiind egală cu o jumătate din lățime, reprezintă $336-(10+4+10+4+14+14)=280$ m; $l=280 : 8\times 2=70$ (m); $L=(35+14)\times 2=98$ (m); aria $=70\times 98=6\ 860\ (m^2)$.

Rezolvarea 2

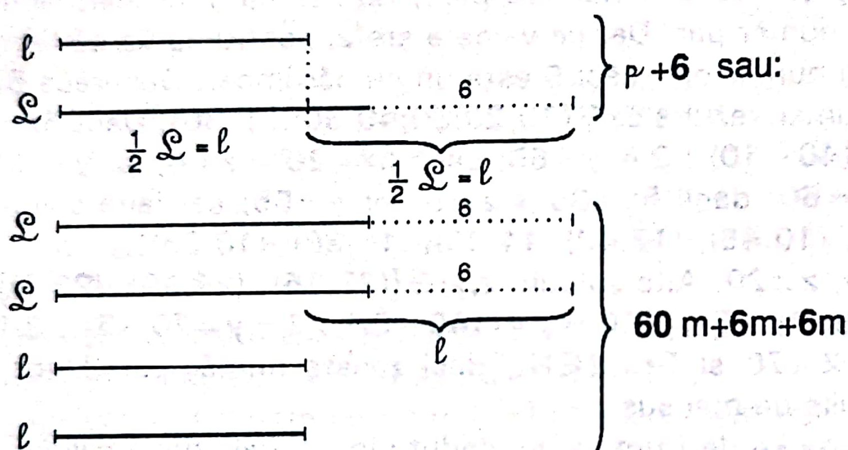
Dacă prin adăugarea a 10 m la jumătate din lățime se obține cu 4 m mai puțin decît o jumătate din lungime, rezultă că o jumătate din lățime este cu $10+4=14$ m mai mică decît o jumătate din lungime; deci lățimea este cu $14+14=28$ m mai mică decît lungimea. De aici, avem o problemă simplă de sumă și diferență, adică: $l+L=336:2=168$ (m), iar $L=l+28$, de unde rezultă că $2l=140$, $l=70$ m, iar $L=168-70=98$ (m)
sau $L=70+28=98$ (m); aria $=98\times 70=6\ 860$ (m^2).

Rezolvarea 3

Din enunț rezultă că: $\frac{1}{2}l+10=\frac{1}{2}L-4/+4 \Rightarrow \frac{1}{2}l+14=\frac{1}{2}L/\times 2 \Rightarrow l+28=L$; atunci $2(L+l)=336 \Leftrightarrow 2(2l+28)=336 \Rightarrow 2l+28=168 \Rightarrow l=70$ m; $L=98$ m; aria $=6\ 860$ m^2.

476. Rezolvarea 1

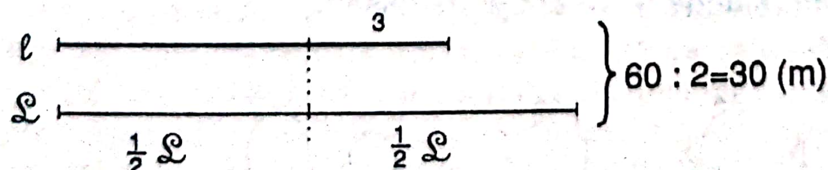
Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă că $3l=36$ m, căci $p+6=(60+12):3=36$ (m), $l=12$ m, iar $L=2\times 12-6=18$ (m) sau $L=36-6-12=18$ (m) sau $6l=60+12=$ $=72$ (m), $l=12$m, iar $L=(60-2\times 12):2=18$ (m) sau $2\times 12-6=18$ (m); aria $=6\ 860$ m^2.

Rezolvarea 2

Atunci cînd s-ar mări lungimea dreptunghiului cu 6 m, jumătate din ea s-ar mări cu 3 m. Dacă lățimea este cît jumătate din lungimea mărită cu 3 m, rezultă că lățimea este mai mare cu 3 m decît jumătate din lungime. De aici, reprezentarea grafică poate fi:



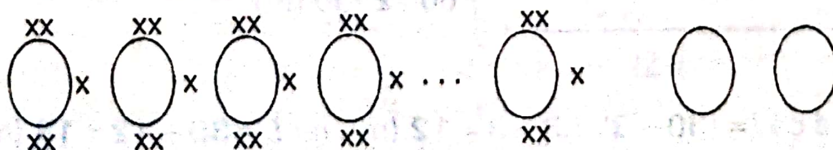
Din desen rezultă că $l=(30-3):3+3=12$ (m), iar $L=30-12=18$ (m) sau $L=(30-3):3\times 2=18$ (m); aria $=6\ 860$ m^2.

Rezolvarea 3 Din enunţ rezultă: $(L+6):2=l \Rightarrow L+6=2l \Rightarrow L=2l-6$; $(L+l)=60:2=30$; înlocuind pe L în semiperimetru, rezultă că $2l-6+l=$ $=30 \Rightarrow 3l=36 \Rightarrow l=12$ (m); $L=2\times 12-6 \Rightarrow L=18$ (m); aria$=6\ 860$ m^2.

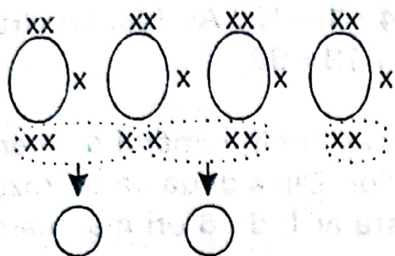
477. a) Dacă numărul monedelor de 20 lei era egal cu cel al monedelor de 50 lei, rezultă că o grupă de 2 monede diferite valora $20+50=70$ lei, iar în suma de 1 400 lei erau 20 monede de fiecare fel, căci $1\ 400:70=20$.
Verificare: $20=20$; $20\times 20+20\times 50=400+1\ 000=1\ 400$.
b) Dacă cele două sume erau egale, rezultă că suma plătită cu monede de un singur fel era de 700 lei, căci $1\ 400:2=700$. Erau 35 monede de 20 lei, deoarece $700:20=35$; erau 14 monede de 50 lei, căci $700:50=$ $=14$. Verificare: $14\times 50+35\times 20=700+700=1\ 400$; $700=700$.
c) Rezolvarea 1 Notăm numărul monedelor de 20 lei cu y, iar al celor de 50 lei cu z. Suma obţinută din monedele de 20 lei va fi $20y$, iar cea obţinută din monedele de 50 lei va fi $50z$. Din enunţ rezultă: $20y+50z=$ $=1\ 400/:10 \Rightarrow 2y+5z=140$. Deoarece există cel puţin o monedă de fiecare fel, iar $2y$ şi 140 sînt numere pare, rezultă că şi celălalt termen al sumei este un număr par. Dar ce valoare are z, pentru ca $5z$ să fie număr par? Numai un număr par, căci 5 este un număr impar. Deoarece $5z$ este un termen al sumei, rezultă $5z\in\{10;20;30;40;50;...;130\}$. Dacă $5z=10 \Rightarrow$ $z=2$, iar $y=(140-10):2 \Leftrightarrow y=65$; dacă $5z=20 \Rightarrow z=4$, iar $y=(140-$ $-20):2 \Leftrightarrow y=60$; dacă $5z=30 \Rightarrow z=6$, iar $y=55$; celelalte soluţii sînt: $(z,y)\in\{(8,50), (10,45), (12,40), (14,35), (16,30), (18,25)\}$.
Deoarece $z\neq y$, $z\neq 20$. Alte soluţii: $(z,y)\in\{(22,15), (24,10), (26,5)\}$.
Rezolvarea 2 Din $2y+5z=140 \Rightarrow y=(140-5z):2 \Rightarrow y=70-5z:2$, în care $z\neq y\neq 0$, $5z:2<70$ şi $5z:2\in N^*$, deci z este număr par diferit de 0. Obţinem soluţiile de mai sus.

478. Pentru a afla cîte kg de fructe s-au vîndut din ultimele două calităţi, avînd preţul unitar, trebuie să aflăm cîţi lei s-au încasat în total pe aceste două calităţi. Dacă scădem din totalul de 35 150 lei suma încasată pentru 52 kg, obţinem suma căutată, adică: $35\ 150-52\times 350=16\ 950$ (lei). Pentru cîte kg de fructe s-au încasat 16 950 lei? $113-52=61$ kg. Parcurgem o cale tipică acestor probleme (de falsă ipoteză, a se vedea VI.1. – VI.13., vol. 1), şi obţinem exerciţiul: $(16\ 950-61\times 250):(300-250)=34$ (kg fructe cal. a III–a); $61-34=27$ (kg, calitatea a II–a) sau $(61\times 300-$ $-16\ 950):(300-250)=27$ etc.

479. Rezolvarea 1 Dacă reprezentăm grafic o minge printr-un oval, iar un elev, printr-un x, putem ajunge la un astfel de desen:
În prima situaţie:



Încercăm să obținem situația a doua: de la fiecare minge „luăm” cîte **2** elevi (ca să rămînă cîte **3**). Cîți elevi redistribuim? Întîi cei **3** elevi pentru una dintre mingile nefolosite, apoi încă **3** pentru cealaltă minge nefolosită și încă **2** elevi care, în situația a doua, rămîn fără minge. Obținem situația a doua:



Celelalte figuri sînt în plus (căci nu pot avea corespondent în situația a doua). Cîte mingi erau? $4+2=6$. Cîți elevi erau? $6\times3+2=18+2=20$.

Rezolvarea 2

1) nr. mingi: m | 2

nr. elevi: m | m | m | m | m

2) nr. mingi: m | 2

nr. elevi= $3(m+2)+2$: m | m | m | $3\text{x}2+2$

Din desen rezultă $2m=8 \Leftrightarrow m=4$. Deci erau **6** mingi, căci $4+2=6$. Erau **20** elevi, deoarece $5\times4=20$ sau $3\times4+8=20$.

Rezolvarea 3 Notăm cu d numărul elevilor, cu m numărul mingilor. Din enunț rezultă: $d:5=m-2$, iar $(d-2):3=m$. Obținem: $d=5(m-2) \Leftrightarrow d=5m-10$, iar $(5m-10-2):3=m \Leftrightarrow 5m-12=3m \Rightarrow m=6$; $d=5\cdot(6-2) \Rightarrow d=20$.

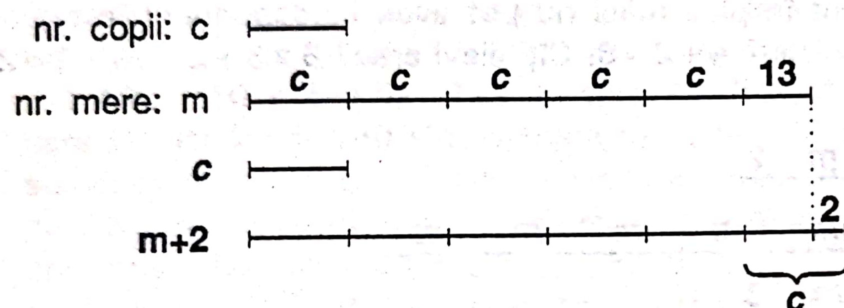
480. Pornim de la situația a doua încercînd să o obținem pe prima. Redistribuim cei **5** jucători de la ultimul panou (căci acolo ar mai fi trebuit **2** să fie **7**) și încă **7**, pentru ca **2** panouri să rămînă libere. Cîți jucători mai punem la fiecare panou $(7+?=10)$? $10-7=3$. La cîte panouri mai distribuim cîte **3**, adică la cîte panouri „ajung” cei $5+7=12$ jucători? $12:3=4$. Vor fi deci **4** panouri cu cîte **10** jucători, iar **2** panouri sînt libere. În total sînt $4+2=6$ panouri și **40** jucători, căci $10\times4=40$ sau $5\times7+1\times5=40$. (Pentru alte soluții, a se vedea **VI.13 – VI.24.** din volumul **1**).

481. Aparent, problema este oarecum diferită de cele întîlnite mai sus. Totuși dacă o reformulăm, este evident că analogia ne poate susține în rezolvarea problemei: „Un număr de mere se împarte unor copii. Dacă fiecăruia i s-ar da cîte **5**, ar rămîne **13** mere, iar dacă fiecăruia i s-ar da cîte **6** mere, un copil ar primi numai **4** mere”.

Rezolvarea 1 Cîte mere reîmpart în a doua variantă? Cele 13 mere care, în prima variantă, sînt în plus și încă un măr, căci ultimul copil trebuie să aibă 4, nu 5 mere (cum este în prima variantă). Deci: $13+(5-4)=14$. Cîte mere mai dau la fiecare copil pentru a avea cîte 6? $6-5=1$. La cîți copii pot da cîte 1 din cele 14 mere? $14 : 1=14$. Deci sînt 14 copii cu cîte 6 mere, iar un copil are 4 mere. Erau 15 copii, căci $14+1=15$. Au fost împărțite 88 mere, deoarece $14\times6+4=88$ sau $15\times5+13=88$.

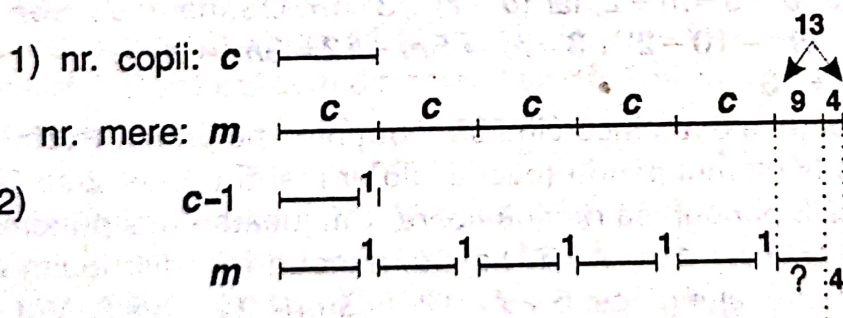
Rezolvarea 2 Grafic, cu mai multe variante:

a) Din prima parte a enunțului reformulat rezultă că numărul de mere este cu 13 mai mare decît de 5 ori numărul copiilor. Din a doua parte, rezultă că dacă am mări cu 2 numărul de mere, acesta ar fi de 6 ori mai mare decît numărul copiilor, adică:



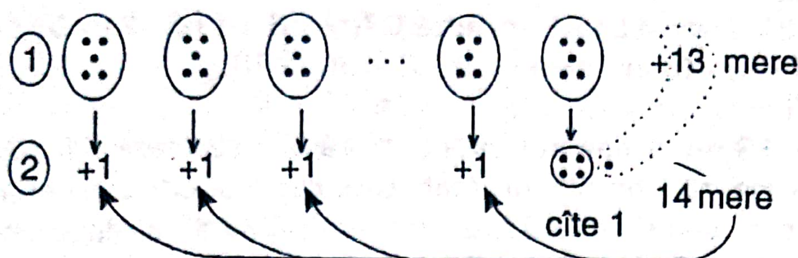
Din desen rezultă că $13+2=c$. Deci erau 15 copii și $15\times5+13=88$ mere.

b) Dacă fiecărui copil i se dă întîi cîte 5 mere, rămînînd 13, înseamnă că numărul merelor este de 5 ori mai mare decît numărul copiilor plus încă 13 mere. A doua oară, un copil primește numai 4 mere, nu 6. Dacă din numărul copiilor scădem 1, atunci numărul merelor este de 6 ori mai mare decît numărul (micșorat cu 1) al copiilor, adică:



Din comparația celor două reprezentări ale numărului de mere, se observă că din cele 5 părți din prima reprezentare se pot forma numai 5 părți în a doua reprezentare, dacă din fiecare parte se scade 1. Trebuie să fie însă 6 asemenea părți. Ultima parte se formează din $5\times1+(13-4)=14$. Rezultă că a șasea parte din numărul de mere pe care l-am micșorat cu 4 este tocmai 14. Cîte mere erau? $6\times14+4=88$ (mere). Cîți copii erau? $14+1=15$ sau $(88-4) : 6+1=15$ (copii).

c) Fiecare copil primeşte întîi cîte 5 mere, rămînînd 13 mere, adică:



Erau 14 copii cu cîte 6 mere, unul cu 4 mere, sau 15 copii cu cîte 5 mere, rămînînd 13 mere.

Rezolvarea 3

Altă soluţie poate fi, păstrînd notaţiile de mai sus: $m : c = 5$ (rest 13) $\Rightarrow$ $m = 5c + 13$; $m : (c-1) = 6$ (rest 4) $\Rightarrow m = 6(c-1) + 4 \Leftrightarrow m = 6c - 2$.
Rezultă: $5c + 13 = 6c - 2 / + 2 \Rightarrow 5c + 15 = 6c \Rightarrow c = 15$; $m = 5 \cdot 15 + 13 = 88$.

482. Cîte creioane reaşezăm pentru a obţine situaţia în care în fiecare cutie intră cîte 10 creioane (varianta primă dată în enunţ). Care creioane reaşezăm? Creioanele din cele 6 cutii (care trebuie să rămînă goale)? $6 \times 6 = 36$. Cîte creioane mai distribuim la fiecare cutie? $10 - 6 = 4$. Cîte cutii vor avea cîte 10 creioane? $36 : 4 = 9$. Cîte cutii erau? $9 + 6 + 1 = 16$. Cîte creioane erau? $9 \times 10 + 3 = 93$ sau $15 \times 6 + 3 = 93$.

483. Pornind de la situaţia cînd elevii se grupează cîte 6, încercăm să obţinem cealaltă distribuire. Luăm elevii din ultimele 15 rînduri pentru a-i distribui la rîndurile din faţă (pentru a fi cîte 9). Cîţi elevi redistribuim astfel? $15 \times 6 = 90$. Cîţi elevi mai adăugăm la fiecare rînd, pentru a fi cîte 9? $9 - 6 = 3$. La cîte rînduri mai adăugăm cîte 3 din cei 90 de elevi? $90 : 3 = 30$. Cîţi elevi sînt? $30 \times 9 = 270$ sau $(30 + 15) \times 6 = 270$ (elevi).
Sau: Dacă numărul elevilor îl notăm cu d, iar numărul de rînduri cu c, putem scrie: $d : 6 = c \Rightarrow d = 6c$; $d : 9 = c - 15 \Rightarrow d = 9c - 135$.
Rezultă $9c - 135 = 6c \Rightarrow 3c = 135 \Rightarrow c = 45$, iar $d = 6 \cdot 45 \Leftrightarrow d = 270$.

484. Rezolvarea 1

Cei 725 lei sînt distribuiţi în mod egal celorlalţi participanţi (pentru a fi încasaţi). Dacă fiecare elev va plăti 750 lei în loc de 725 lei, înseamnă că fiecare va plăti cu $750 - 725 = 25$ lei mai mult. Dacă fiecare elev va plăti mai mult cu 25 lei, atunci de la cîţi elevi se adună suma de 725 lei (cîţi elevi au plecat cu vaporaşul)? $725 : 25 = 29$ (elevi). Ce sumă trebuia să se plătească în total? $29 \times 750 = 21\ 750$ (lei) sau $(29 + 1) \times 725 = 21\ 750$ (lei).

Rezolvarea 2

Notăm cu d suma totală de bani, cu c numărul iniţial de elevi din grup.
Rezultă: $d : 725 = c \Rightarrow d = 725c$; $d : 750 = c - 1 \Rightarrow d = 750c - 750$.
Atunci $750c - 750 = 725c \Rightarrow 25c = 750 \Rightarrow c = 30$.
Au plecat $30 - 1 = 29$ elevi, iar suma totală era de $29 \times 750 = 21\ 750$ lei.

485. a) Din $d=13c+12$ și $d=17c$, rezultă: $13c+12=17c \Rightarrow 4c=12 \Rightarrow c=3$, iar $d=17\times3 \Leftrightarrow d=51$.

b) Din $d=37c+26$ și $d=41c+2$, rezultă $37c+26=41c+2 \Rightarrow 37c+24=$ $=41c \Leftrightarrow 4c=24 \Rightarrow c=6$, iar $d=41\times6+2 \Rightarrow d=248$.

Problemele pot fi:

a) Dacă dau cîte **13** mere fiecărui copil, îmi rămîn **12** mere, iar dacă dau cîte **17** mere, nu mai rămîne nici un măr. Cîte mere și cîți copii sînt?

b) Dacă cumpăr creioane de cîte **37** lei, îmi rămîn **26** lei, iar dacă un creion ar costa **41** lei, mi-ar rămîne **2** lei. Ce sumă de bani am și cîte creioane vreau să cumpăr?

486. Plecînd de la situația constituirii perechilor (prima variantă), regrupăm cele **6** lalele fără pereche plus cele $2\times1=2$ lalele de la cei **2** trandafiri ce rămîn negrupați și obținem situația a doua. Cîte lalele regrupăm pentru a obține situația a doua? $6+2\times1=8$ (lalele). Cîte lalele mai adăugăm la fiecare pereche (o lalea plus un trandafir) pentru a obține o grupă din situația a doua (un trandafir plus **2** lalele)? $2-1=1$ (lalea). La cîte grupe mai adăugăm cîte o lalea din cele **8**? $8 : 1=8$ (grupe). Cîți trandafiri erau? $8\times1+2=10$. Cîte lalele erau? $8\times2=16$ (lalele) sau $10\times1+6=16$ (lalele).

487. Pentru mai multe soluții, a se vedea problemele **VI.7** și **IX.12** din volumul **1**. În formulă numerică, rezolvarea este: $10-[(8\times3-10) : (3+4)]=$ $=10-2=8$ (probleme rezolvate).

488. Rezolvarea 1. Comparație prin scădere. Fie a și b cele două numere. Din enunț rezultă: $a+b=56$ și $a : 4+a : 2=19$, adică suma dintre sfertul lui a și doimea lui b este **19**. Pentru a compara relația a doua cu prima, înmulțim ambii membri ai egalității a doua cu **4** (se mai poate înmulți cu **2** sau se pot împărți ambii membri ai primei egalități cu **4** sau cu **2**), adică:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=56 \\ a:4+b:2=19 \;/\times4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=56 \\ a+2b=76 \end{array}\right\} \Rightarrow b=76-56 \Rightarrow b=20, \text{ iar } a=56-20 \Rightarrow a=36.$$

Rezolvarea 2. Falsă ipoteză. Presupunem că ambele numere se împart la **2**, atunci și suma va fi $56 : 2=28$, cu $28-19=9$ mai mare decît suma dată prin împărțirea primului număr la **4**, nu la **2**. Deci diferența dintre jumătatea și sfertul primului număr este **9**, adică sfertul primului număr este **9**. Atunci primul număr este **36**, căci $4\times9=36$, iar al doilea este **20**, deoarece $56-36=20$.

489. Rezolvarea 1 Dacă **5** cai consumă **170** q de fîn, atunci **1** cal consumă $170 : 5=34$ q de fîn, iar **3** cai consumă $3\times34=102$ q de fîn. Dacă **17** q de fîn ajung pentru o vacă, atunci **102** q de fîn ajung pentru $102 : 17=6$ vaci.

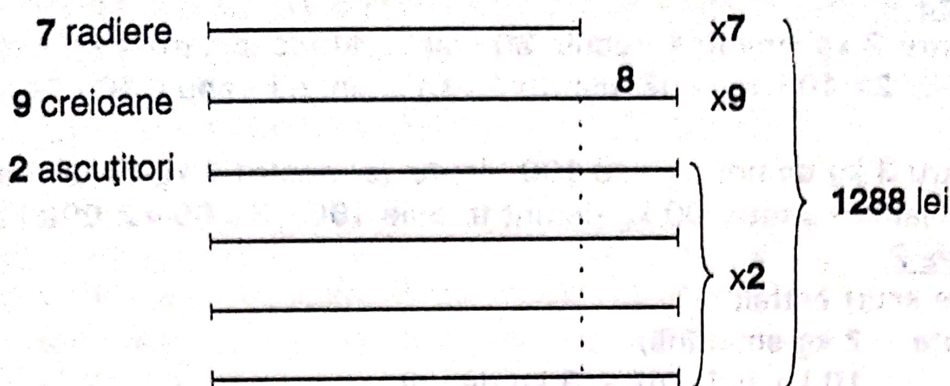
Rezolvarea 2 Cîte q de fîn consumă un cal într-un an? $170 : 5=34$ q. De cîte ori consumă mai mult un cal decît o vacă? $34 : 17=2$ (ori). Rezultă că fînul consumat de **3** cai va ajunge pentru **6** vaci, deoarece $2\times3=6$.

490. Rezolvarea 1
Dacă pentru 2 kg smîntînă trebuie 20 l lapte, atunci pentru 1 kg smîntînă trebuie $20 : 2 = 10$ l lapte, iar pentru 10 kg smîntînă trebuie $10 \times 10 = 100$ l lapte.
Deci pentru 3 kg de unt trebuie 100 l lapte, iar pentru 1 kg de unt trebuie $100 : 3$ (l lapte); pentru 60 kg de unt trebuie $100 : 3 \times 60 = 2\,000$ l lapte.
Rezolvarea 2
Scriem pe scurt astfel:
20 l lapte → 2 kg smîntînă;
10 kg smîntînă → 3 kg de unt.
Egalăm datele pentru cantitatea de smîntînă, înmulţind fiecare membru al primei relaţii cu 5. Deci:
5×20 l lapte → 5×2 kg smîntînă ⇒
100 l lapte → 10 kg smîntînă ⇒
100 l lapte → 3 kg de unt/ $\times 20$ ⇒
2 000 l lapte → 60 kg unt.

491. Dacă prima brigadă ar fi terminat lucrarea în 4 zile, atunci a şasea parte ($\frac{1}{6}$) din efectivul ei va termina lucrarea în $6 \cdot 4 = 24$ zile, căci, numărul muncitorilor fiind de 6 ori mai mic, timpul necesar va fi de 6 ori mai mare. Analog, un sfert ($\frac{1}{4}$) din efectivul brigăzii a doua va termina lucrarea în $4 \times 6 = 24$ zile, iar a treia parte ($\frac{1}{3}$) din efectivul brigăzii a treia va termina lucrarea în $3 \times 8 = 24$ zile. Rezultă că fiecare grup din noua echipă ar lucra într-o singură zi a 24-a parte ($\frac{1}{24}$) din lucrare, iar împreună, cele 3 grupuri ar lucra într-o zi 3 asemenea părţi, adică $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ din lucrare. Pentru toată lucrarea, vor fi necesare 8 zile.

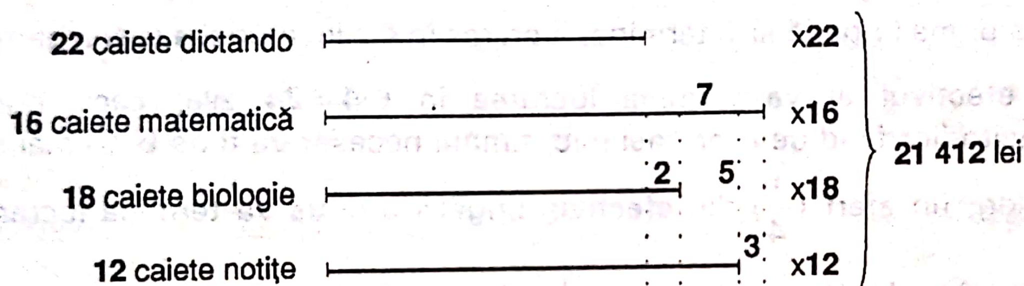
492. Pe scurt, relaţiile sînt: 6 pixuri şi 36 creioane costă 3 000 lei, 6 pixuri şi 1 stilou costă 3 000 lei, 1 pix, 1 stilou şi 20 creioane costă 3 000 lei. Din comparaţia primelor două relaţii, rezultă că 1 stilou costă cît 36 de creioane. Înlocuind în ultima relaţie şi comparînd-o cu prima obţinem:
I: 1 pix şi 56 creioane costă 3 000 lei, iar II: 6 pixuri şi 36 creioane costă 3 000 lei/ : 6 ⇒ 1 pix şi 6 creioane costă 500 lei, iar $56 - 6 = 50$ creioane costă $3\,000 - 500 = 2\,500$ lei, adică 1 creion costă $2\,500 : 50 = 50$ lei. Un pix costă $500 - 6 \times 50 = 200$ lei. Un stilou costă $3\,000 - 6 \times 200 = 1\,800$ lei.
Încercaţi şi alte moduri de rezolvare: din comparaţia ultimelor două relaţii, rezultă că 5 pixuri costă cît 20 creioane, adică 1 pix costă cît 4 creioane etc.

493. Reprezentarea grafică poate fi:
Preţul pentru:



Într-o variantă de rezolvare, din desen rezultă că 1 288 + 7 × 8 = 1 344 lei reprezintă suma pentru 7 + 9 + 2 × 4 = 24 părți, fiecare parte fiind egală cu prețul unui creion. Cît costă un creion? 1 344 : 24 = 56 (lei).
Cît costă o radieră? 56 − 8 = 48 (lei). Dar o ascuțitoare? 4 × 56 = 224 (lei).

494. Reprezentarea grafică poate fi:
Prețul pentru:



Cîte caiete au cumpărat în total? 22 + 16 + 18 + 12 = 68 (caiete). Cîți lei ar fi costat 68 de caiete dictando (cele mai ieftine)? 21 412 − (167 + + 18 × 2 + 12 × 4) = 21 216 (lei). Cîți lei a costat un caiet de dictando? 21 216 : 68 = 312 (lei). Cîți lei a cheltuit fiecare copil? Primul: 312 × 22 = 6 864 (lei); al doilea: (317 + 7) × 16 = 5 104 (lei); al treilea: (312 + 2) × 18 = 5 652 (lei); al patrulea: (312 + 4) × 12 = 3 792 (lei).

495. Dacă 5 kg de mere costă cît 960 lei plus o cincime din prețul unui kg, rezultă că 24 cincimi de kg mere costă 960 lei. De ce? Un kg de mere (un întreg) are 5 cincimi, iar 5 kg au 5 × 5 cincimi = 25 cincimi kg de mere. Atunci 25 cincimi kg de mere → 960 lei plus o cincime kg de mere, adică 24 cincimi kg de mere → 960 lei; o cincime kg de mere costă 960 : 24 = = 40 (lei), iar un kg de mere costă 5 × 40 = 200 lei.

496. $P = (L + l) \times 2$, pentru perimetrul dreptunghiului, iar pentru cel al pătratului, $4l$, unde L este lungimea dreptunghiului, iar l este lățimea dreptunghiului, sau latura pătratului. Deoarece $L = 3l$, atunci $P_{dr.} = (3l + l) \times 2 = 8l$, iar $P_{pătrat} = 4l$.
Rezultă că perimetrul dreptunghiului este mai mare decît perimetrul pătratului de 2 ori, căci $8l : 4l = 2$. Particularizarea: Fie $L = 9$ m (un număr divizibil cu 3).

Perimetrul dreptunghiului ar fi 24 m, căci $(9+9:3)\times 2=(9+3)\times 2=24$, iar perimetrul pătratului ar fi de 12 m, căci $l=9:3=3$, iar $4l=12$ m. Atunci 24 m : 12 m = 2 (ori).

497. a) Deoarece $a=16$, rezultă $e=21$, iar $f=46-21 \Rightarrow f=25$.
b) Deoarece $a=99$, rezultă $e=25$, iar $f=25+102 \Rightarrow f=127$.

498. Fie a numărul căutat. Din enunţ rezultă: $a+117-9=203-18$; $a=77$.

499. $a-7\times 7=7+7$; $a=63$.

500. $a:2+1\,004:4=1\,007 \Rightarrow a:2+251=1\,007$; $a=1\,512$.

501. $a:2+a:4+230=a+8 \Rightarrow \frac{3}{4}a+222=a \Rightarrow \frac{1}{4}a=222$,
iar $a=222\times 4 \Rightarrow a=888$.

502. $a-16=37-20 \Rightarrow a-16=17 \Rightarrow a=33$.

503. $100-a=29+18 \Rightarrow 100-a=47 \Rightarrow a=53$.

504. Fie numerele naturale a și b. Din enunț rezultă: $a+b=708$; $a-108=97 \Rightarrow a=205$, iar $205+b=708$, deci $b=503$. Restul al doilea este 395, căci $503-108=395$. Sau: $708-2\times 108=492$; $492-97=395$.

505. Fie numerele naturale a și b.
Din enunț rezultă: $a-b=999$. Dacă $a=1\,000$, rezultă $1\,000-b=999 \Rightarrow b=1$. Dacă $b=1\,000$, rezultă $a-1\,000=999 \Rightarrow a=1\,999$.

506. $(266+198):(103-a)=77$ (rest 2) $\Leftrightarrow (266+198-2):77=103-a \Leftrightarrow 462:77=103-a \Rightarrow 6=103-a \Rightarrow a=103-6 \Rightarrow a=97$.
Dacă avem $a-103$, atunci $a=109$.

507. $81:9\times 2-(3\cdot 3-2)-10=18-7-10=1$.

508. a) $24-2y=y\cdot y \Rightarrow 24=2y+y\cdot y \Rightarrow 24=y(y+2)$. Descompunem pe 24 în două numere consecutive pare (căci au produsul par).
Deoarece $24=4\times 6 \Rightarrow y=4$.
Verificare: $(24-4-4):4=16:4=4$.
b) $(48-y):y=4y+y \Rightarrow 48-y=5y\cdot y \Rightarrow 48=5y\cdot y+y \Rightarrow 48=y(5y+1)$. Descompunem pe 48 în doi factori, dintre care unul să fie cu 1 mai mare decît produsul dintre celălalt factor și 5.
Deoarece $48=3(15+1)$, rezultă $y=3$; sau $48:y-y:y=5y \Rightarrow 48:y-1=$
$=5y \Rightarrow 48:y=5y+1 \Rightarrow 48=y(5y+1) \Rightarrow y=3$.
c) $24:y+4+1=11 \Rightarrow 24:y=11-5 \Rightarrow 24:y=6 \Rightarrow y=4$.
d) $17:y+y-1=17 \Rightarrow 17:y+y=18 \Rightarrow 17:y=18-y \Rightarrow 17=(18-y)\cdot y$.
Descompunem pe 17 în doi factori, adică $17=1\cdot 17 \Rightarrow y=17$ sau $y=1$.
e) $2(y\times 23:4)=184 \Rightarrow y\times 23:4=92 \Rightarrow y\times 23=368 \Rightarrow y=368:23 \Rightarrow y=16$.
f) $5(y:2\times 4)=60 \Rightarrow y:2\times 4=12 \Rightarrow y:2=3 \Rightarrow y=6$; sau $5\cdot(2y)=60$ etc.

509. $\{16\,000-[(6x+3\,708):x+1\,008]\cdot 13-60\}:200=2-1 \Rightarrow 16\,000-$
$-[(6x+3\,708):x+1\,008]\cdot 13-60=1\times 80 \Rightarrow 16\,000-[(6x+3\,708):x+$
$+1\,008]\cdot 13=60+80 \Rightarrow [(6x+3\,708):x+1\,008]\cdot 13=16\,000-140 \Rightarrow$
$(6x+3\,708):x+1\,008=15\,860:13 \Rightarrow (6x+3\,708):x=1\,220-1\,008 \Rightarrow$
$(6x+3\,708):x=212$.

Deoarece deîmpărţitul este egal cu împărţitorul înmulţit cu cîtul, rezultă $6x+3\ 708=212x$. Deoarece un termen este egal cu diferenţa dintre sumă şi celălalt termen, rezultă $3\ 708=212x-6x \Rightarrow x=3\ 708 : 206 \Rightarrow x=18$.

510. $42 : 6=7$ sau $7\times6 : 6=7$; $9\times8=72$ sau $18\times8 : 2=72$ sau $18\times(8 : 2)=$ $=72$; $72 : 3=24$ sau $9 : 3\times8=24$ sau $8\times(9 : 3)=24$; $12\cdot(2+4)=72$ sau $12\cdot6 : 3+12\cdot4=72$; $10\times8=80$ sau $20 : 4\times8+5\times8=20\cdot(8 : 4)+40=80$;

$a : 3\times9+9a=a\cdot(9 : 3)+9a=3a+9a=12a$ sau $9(a : 3+a)=9\cdot(\frac{1}{3}a+a)=$

$=9\cdot\frac{4}{3}a=12a$.

1) $4\cdot\{3+3\cdot[a+4\cdot(a : 2+2)] : 6\} : 31=12-8 \Rightarrow$
$4\cdot\{3+3\cdot[a+4\cdot(a : 2+2)] : 6\}=31\times4 \Rightarrow$
$3+3\cdot[a+4\cdot(a : 2+2)] : 6=31\times4 : 4 \Rightarrow 3\cdot[a+4\cdot(a : 2+2)] : 6=31-3 \Rightarrow$

$3\cdot[a+4\cdot(a : 2+2)]=28\times6 \Rightarrow$ $a+4\cdot(a:2+2)=28\times6:3$ $\Rightarrow$

$a+a : 2\times4+8=56 \Rightarrow a+2a=48 \Rightarrow a=48 : 3 \Rightarrow a=16$.

2) $128-\{46+[a-4\cdot(a : 8+6)+90] : 5\} : 4=110-7 \Rightarrow$
$\{46+[a-4\cdot(a : 8+6)+90] : 5\} : 4=128-103 \Rightarrow$
$46+[a-4\cdot(a : 8+6)+90] : 5=4\times25 \Rightarrow$
$[a-4\cdot(a : 8+6)+90] : 5=100-46 \Rightarrow a-4\cdot(a : 8+6)+90=54\cdot5 \Rightarrow$

$a-4\cdot(a : 8+6)=270-90 \Rightarrow$ $a-4\cdot(a:8+6)=180$ $\Rightarrow a-(a : 8\cdot4+$

$+6\cdot4)=180 \Rightarrow$ $a-(a : 2+24)=180 \Rightarrow$ $a=180+a : 2+24 \Rightarrow$
$a=204+a : 2$. Rezultă $a : 2=204$, iar $a=408$.

3) Aducem exerciţiul la forma cea mai simplă.
$13\ 230 : (a\cdot a-32)-8\ 080 : 80=169 \Rightarrow 13\ 230 : (a\cdot a-32)-101=169$.
Rezultă: $13\ 230 : (a\cdot a-32)=169+101 \Rightarrow a\cdot a-32=13\ 230 : 270 \Rightarrow$
$a\cdot a=49+32 \Rightarrow a\cdot a=81 \Rightarrow a=9$.

511. a) Aducem exerciţiul la forma cea mai simplă. Se pot parcurge mai multe căi, lucrînd cu fracţii, cu fracţii zecimale sau cu numere naturale.

Rezolvarea 1 Deoarece $0{,}75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$, iar $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, egalitatea devine:

$28+8\cdot[x-8 : (1\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+1\frac{2}{4}) : (\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4})]=100 \Leftrightarrow 28+8\cdot(x-$

$-8 : 2\frac{8}{4} : \frac{8}{4})=100 \Leftrightarrow 28+8\cdot(x-8 : 4 : 2)=100 \Leftrightarrow 28+8\cdot(x-1)=100 \Leftrightarrow$
$8\cdot(x-1)=100-28 \Leftrightarrow x-1=72 : 8 \Leftrightarrow x-1=9 \Rightarrow x=10$.

Rezolvarea 2

Deoarece $1\frac{3}{4}=1+\frac{3}{4}=1,75$, iar $\frac{1}{2}=0,50$, egalitatea devine:

$28+8\cdot[x-8:(1,75+0,75+1,50):(0,75+0,75+0,50)]=100 \Leftrightarrow$
$28+8\cdot(x-8:4:2)=100 \Leftrightarrow 8\cdot(x-1)=72 \Rightarrow x=10.$

Rezolvarea 3

Înlocuind unele fracții date cu altele echivalente, pentru a avea același numitor (pentru clasa a V-a, se poate folosi algoritmul de aducere a fracțiilor la același numitor), egalitatea devine:

$$28+8\cdot[x-8:(\frac{4}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+\frac{2}{4}):(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4})]=100.$$

Se observă că numărătorii din paranteza mică au fost împărțiți pe rînd la 4, ceea ce se poate scrie și astfel:

$28+8\cdot\{x-8:[(4+3+3+4+2):4]:[(3+3+2):4]\}=100 \Leftrightarrow 28+8\cdot[x-$
$-8:(16:4):(8:4)]=100 \Leftrightarrow 28+8\cdot(x-8:4:2)=100 \Leftrightarrow$
$8\cdot(x-1)=72 \Rightarrow x=10.$

b) Scrierea 1 : 3 este echivalentă cu $\frac{1}{3}$. Rezultă:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+2}{x+\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{6}{7}\right)}=4-\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3}{3}+1\right)\cdot\frac{3}{3}+2}{x+\frac{14}{7}}=4-\frac{10}{5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\cdot1+2}{x+2}=4-2 \Leftrightarrow \frac{4}{x+2}=2 \Leftrightarrow x+2=4:2 \Leftrightarrow x+2=2 \Leftrightarrow x=2-2 \Rightarrow x=0.$$

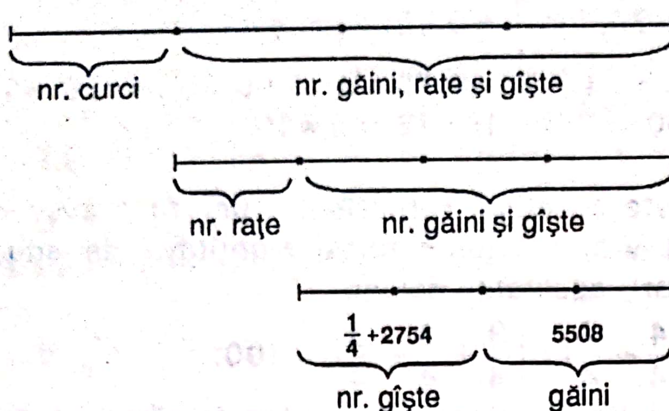
Sau: Se observă că numerele 1 și 2 sînt împărțite la 3; la numitor împărțitorul este 7, iar în membrul al doilea, 5, ceea ce se poate scrie:

$$\frac{[(1+2):3+1]\times[(1+2):3]+2}{x+(1+3+4+6):7}=4-(2+8):5 \Leftrightarrow \frac{(3:3+1)\cdot(3:3)+2}{x+14:7}=4-10:5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\cdot1+2}{x+2}=2 \Leftrightarrow x+2=4:2 \Rightarrow x=0.$$

512. Din cei 30 elevi ai clasei, 29 au primit cîte 2 bomboane (Diana nu este colegă cu ea însăși).
Diana a primit 4 bomboane, ca fiecare dintre cele 3 surori ale sale.
Deci restul a fost împărțit în 4 părți, iar 4 bomboane reprezintă un sfert din acel rest.
Cîte bomboane a împărțit Diana cu surorile sale? $4\times4=16$ (bomboane).
Cîți colegi au primit bomboane? $30-1=29$ (elevi).
Cîte bomboane a împărțit Diana colegilor? $29\times2=58$ (bomboane).
Cîte bomboane a avut Diana la început? $58+16=74$ (bomboane).

513. Reprezentarea grafică poate fi:



Cîte gîște erau? $(5\ 508+2\ 754) : 3+2\ 754=5\ 508$.
Cîte găini și gîște erau? $5\ 508+5\ 508=11\ 016$ sau
$(5\ 508+2\ 754) : 3\times4=11\ 016$.
Cîte rațe erau? $1\ 016 : 3=3\ 672$.
Cîte curci erau? $3\ 672\times4 : 3=14\ 688 : 3=4\ 896$.

514. Rezolvarea 1 După a treia operație, în fiecare grămadă sînt cîte **48 : 3 = 16** mere, adică:

I	a II-a	a III-a
16	**16**	**16**

În I s-au obținut **16** mere prin dublarea unui număr, adică $2\times a=16$. Rezultă că înainte de ultima operație, în prima grămadă erau **16 : 2 = 8** mere. Acele **8** mere au fost luate din a treia grămadă. Cîte mere erau în fiecare grămadă înainte de a treia operație?

16 − 8 = 8	**16**	**16 + 8 = 24**

Cele **24** mere din a treia grămadă au fost obținute prin dublarea unui număr, adică $2\times b=24$. Înainte de a doua operație, în a treia grămadă erau **24 : 2 = 12**. Aceste **12** mere au fost luate din a doua grămadă. Cîte mere erau în fiecare grămadă înainte de a doua operație?

8	**16 + 12 = 28**	**24 − 12 = 12.**

Cele **28** mere din a doua grămadă au fost obținute prin dublarea unui număr, adică $2\times c=28$. Cîte mere erau inițial în fiecare grămadă?

8 + 14 = 22	**28 − 14 = 14**	**12**

Răspuns:

22;	**14;**	**12.**

Rezolvarea 2 Notăm cu a, b și, respectiv, cu c, numărul inițial de mere din fiecare grămadă. Operațiile și resturile sînt:

1) Pune din a în b atît cît conține b. Dar b conține b, deci dublează numărul b. Vor fi:

$a-b$	$2b$	c

2) Pune din $2b$ în c atît cît conține c, adică dublează c. Vor fi:

$a-b$	$2b-c$	$2c$

3) Ia din $2c$ pentru a dubla $a-b$. Vor fi:

$2(a-b)=16$ $\quad$ $2b-c=16$ $\quad$ $2c-(a-b)=16$.

Rezultă: $48:3=16$; $2(a-b)=16 \Rightarrow a-b=8$; $2c-8=16 \Rightarrow 2c=24 \Rightarrow c=12$; $2b-12=16 \Rightarrow 2b=28 \Rightarrow b=14$; $a-14=8 \Rightarrow a=22$.

515. Cîte nuci vor fi în fiecare grămadă? $(7+11+6):3=8$. Potrivit enunțului, trebuie realizate numai **3** mutări, de fiecare dată dublînd numărul din grămada la care punem nuci. În același timp, trebuie să transferăm nuci de la fiecare grămadă. Cum realizăm transferul? Dacă am transfera nuci din prima în a treia grămadă, dublîndu-l pe **6**, în prima ar rămîne o nucă care, printr-o dublare, nu formează **8** nuci. Dacă din **11** nuci am lua **6**, dublînd numărul din a treia grămadă, în a doua ar rămîne **5** nuci care, prin dublare, nu formează **8**. Numărul care, prin dublare, dă **8** este numărul **4**. În care grămadă pot rămîne **4** nuci? Dacă în prima grămadă sînt **7** nuci, număr care trebuie dublat, înseamnă că din a doua grămadă transferăm **7** nuci în prima grămadă, adică:

	I	II	III
	7	11	6
1)	7+7=14	11−7=4	6

Apoi, analizînd situația obținută, rezultă că singura mutare convenabilă este:

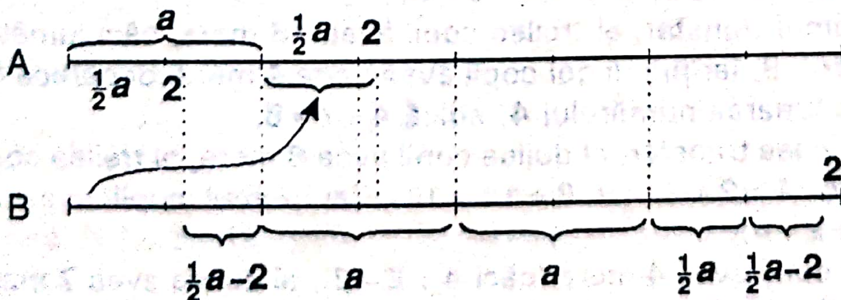
2)	14−6=8	4	6+6=12

În final:

3)	8	4+4=8	12−4=8

Răspuns: Punem din a doua în prima grămadă **7** nuci. Apoi, din prima în a treia grămadă, transferăm **6** nuci. În final, transferăm **4** nuci din a treia în a doua grămadă.

516. Rezolvarea 1 Notăm cu A și B capacitățile celor două bidoane, iar cu a și, respectiv, cu b, cantitățile existente în fiecare bidon. Grafic, situația este următoarea:



Ce obţinem în vasul A?

$a+\frac{1}{2}a+2=\frac{3}{2}a+2.$

Ce rămîne în vasul B?

$\frac{1}{2}a-2+a+a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a-2=\frac{3}{2}a+2a-4=\frac{7}{2}a-4.$

Din enunţ rezultă:

$\frac{7}{2}a-4>\frac{3}{2}a+2\Rightarrow\frac{7}{2}a-4=\frac{3}{2}a+2+6\Rightarrow\frac{7}{2}a-4=\frac{3}{2}a+8/-\frac{3}{2}a\Rightarrow$

$\frac{4}{2}a-4=8\Rightarrow 2a=12\Rightarrow a=6;\ b=4\times6-2\Rightarrow b=22.$

<u>Rezolvarea 2</u>

Păstrăm notaţiile de mai sus:

A B

1) $a=A-\frac{3}{4}A=\frac{1}{4}A$ $A=B$, iar $b=A-2$

$\frac{1}{4}A:2+2=\frac{1}{8}A+2$

Obţinem:

2) $\frac{1}{4}A+\frac{1}{8}A+2=\frac{3}{8}A\,A2;2-\frac{1}{8}A-2=\frac{7}{8}A-4.$

Din enunţ, rezultă:

$\frac{3}{8}A+2+6=\frac{7}{8}A-4\Leftrightarrow\frac{3}{8}A+8=\frac{7}{8}A-4\Leftrightarrow\frac{1}{2}A=12\Rightarrow A=24,$

iar $a=24:4=6;\ b=24-2\Rightarrow b=22.$

517. <u>Rezolvarea 1</u>

Pe scurt, modificările în numărul de mere sînt: la sfîrşit, fiecare dintre cei trei copii are cîte 8 mere, căci $24:3=8$.

Înainte de ultimul transfer, al treilea copil avea 16 mere, căci jumătatea lui 16 este numărul 8, iar primii doi copii aveau cîte 4 mere, deoarece 8 a fost obţinut prin adunarea numărului 4, adică $4+?=8$.

Înainte de al doilea transfer, al doilea copil avea 8 mere, al treilea copil avea 14 mere (căci $4:2=2$, iar $2+14=16$), iar primul copil avea 2 mere (deoarece $2+2=4$).

Iniţial, primul copil avea 4 mere (căci $4:2=2$), al doilea avea 7 mere (căci $2:2=1$, iar $7+1=8$); al treilea copil avea 13 mere (căci $13+1=14$).

Vîrsta fiecăruia era: 7 ani; 10 ani; 16 ani.

Rezolvarea 2 (Mai explicit) După ultima operaţie, fiecare a rămas cu cîte 8 mere, deoarece suma 24, care nu se modifică, se organizează în 3 părţi egale ca număr, adică:

al III-lea copil	al doilea copil	primul copil
(8)	(8)	(8)

Pentru al treilea copil (cel mare), numărul 8 reprezintă jumătatea numărului de mere pe care le avea înainte de a da, adică jumătatea numărului 16, cealaltă jumătate fiind împărţită în mod egal, cîte 4 (căci 8 : 2=4), celorlalţi doi copii.

1)

Înainte de această operaţie, cîte mere avea fiecare?

? : 2 = 8	? +4 = 8	? +4 = 8
8 × 2 = (16)	8 - 4 = (4)	8 - 4 = (4)

Pentru al doilea copil, numărul 4 reprezintă jumătatea numărului de mere pe care le avea înainte de a da şi el, adică jumătatea numărului 8, cealaltă jumătate fiind împărţită în mod egal, cîte 2 (căci 4 : 2=2), celorlalţi doi.

2)

Înainte de această operaţie, cîte mere avea fiecare?

? +2= 16	? : 2 = 4	? +2 = 4
16 - 2 = (14)	4 × 2 = (8)	4 - 2 = (2)

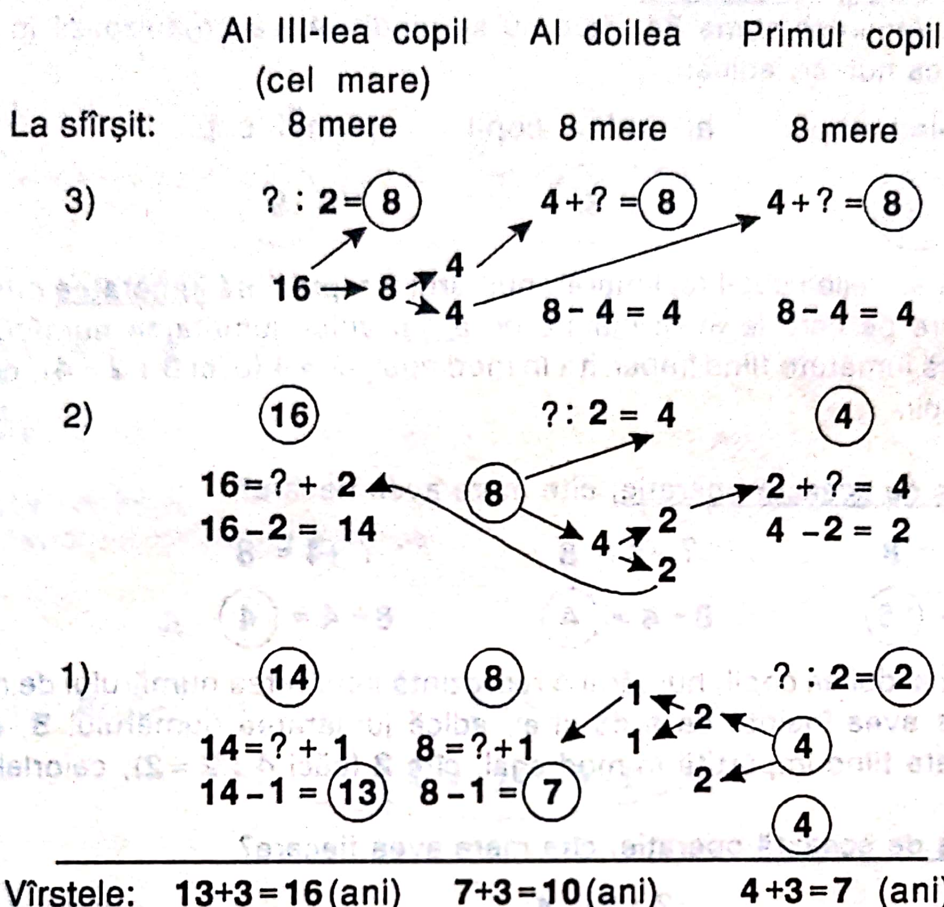
Pentru primul copil (cel mic), numărul 2 reprezintă jumătatea numărului de mere pe care le avea iniţial, adică jumătatea numărului 4, cealaltă jumătate fiind împărţită în mod egal, cîte 1 (căci 2 : 2=1), celorlalţi doi copii.

3)

Cîte mere avea fiecare iniţial?

? +1= 14	? +1 = 8	? : 2 = 2
14 - 1 = (13)	8 - 1 = (7)	2 × 2 = (4)

Cîţi ani are fiecare? Cel mic: 4+3=7 (ani); Mijlociul: 7+3=10 (ani); Cel mare: 13+3=16 (ani). O reprezentare grafică a transferurilor de mere poate fi:



518. Rezolvarea 1

Înainte de transferul realizat de Cristian, pe raftul al treilea erau **32** cărţi (căci **16** este jumătatea lui **32**), iar pe celelalte două rafturi erau cîte **8** cărţi (căci **8 + 32 : 2 : 2 = 8 + 8 = 16**). Înainte de transferul realizat de Bogdan, pe raftul al doilea erau **16** cărţi (căci **8** este jumătatea lui **16**), pe primul raft erau **4** cărţi (căci **4 + 16 : 2 : 2 = 4 + 4 = 8**), iar pe al treilea raft erau **28** cărţi (căci **28 + 16 : 2 : 2 = 32**). Iniţial (înainte de transferul realizat de Alex), pe primul raft erau **8** cărţi (căci **4** este jumătatea lui **8**), pe al doilea raft erau **14** cărţi (căci **14 + 8 : 2 : 2 = 16**), iar pe al treilea raft erau **26** cărţi (căci **26 + 8 : 2 : 2 = 28**).

Rezolvarea 2 Notăm cu ***a***, ***b*** şi, respectiv, cu ***c***, numărul cărţilor din cele trei rafturi. Modificările sînt:

	a	b	c
1)	$a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a$ → (:2)	$b+\frac{1}{2}a:2=b+\frac{1}{4}a$	$c+\frac{1}{4}a$
2)		$(b+\frac{1}{4}a):2=\frac{1}{2}b+\frac{1}{8}a$ (:2 → a, c)	
	$\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{16}a=\frac{9}{16}a+\frac{1}{4}b$	$\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}b$	$\frac{5}{16}a+\frac{1}{4}b+c$
3)			$(\frac{5}{16}a+\frac{1}{4}b+c):2=\underbrace{\frac{5}{32}a+\frac{1}{8}b+\frac{1}{2}c}_{:2}$
	$\frac{41}{64}a+\frac{5}{16}b+\frac{1}{4}c=16$	$\frac{13}{64}a+\frac{9}{16}b+\frac{1}{4}c=16$	$\frac{5}{32}a+\frac{1}{8}b+\frac{1}{2}c=16$

Din ultimele două relații obținute, rezultă:

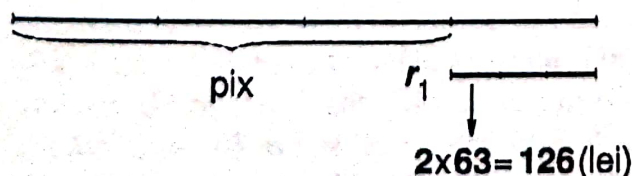
$\frac{41}{64}a+\frac{5}{16}b=\frac{13}{64}b+\frac{9}{16}b\,/-\frac{5}{16}b \Leftrightarrow \frac{41}{64}a=\frac{13}{64}a+\frac{4}{64}b\,/-\frac{13}{64}a \Rightarrow$ $\frac{28}{64}a=\frac{4}{16}b \Leftrightarrow \frac{7}{16}a=\frac{4}{16}b \Rightarrow 7a=4b \Rightarrow a=\frac{4}{7}b$. Atunci: $\frac{8}{64}a+\frac{8}{16}b=16 \Rightarrow$ $\frac{1}{8}a+\frac{4}{8}b=8 \Rightarrow a+4b=64$, iar $\frac{4}{7}b+4b=64 \Rightarrow 32b=448 \Rightarrow b=14;\ a=8;$ $c=26$.

519. a) $\{[(3y+5)\cdot3+5]\cdot3+5\}\cdot3=281-5 \Rightarrow [(3y+5)\cdot3+5]\cdot3+5=276:3 \Rightarrow$ $[(3y+5)\cdot3+5]\cdot3=92-5 \Rightarrow (3y+5)\cdot3+5=87:3 \Rightarrow (3y+5)\cdot3=29-5 \Rightarrow$ $3y+5=24:3 \Rightarrow 3y=8-5 \Rightarrow y=3:3 \Rightarrow y=1$.

b) $2\cdot\{2+2\cdot[2+2\cdot(2-2:a)]\}=22-2 \Rightarrow$
$2+2\cdot[2+2\cdot(2-2:a)]=20:2 \Rightarrow 2\cdot[2+2\cdot(2-2:a)]=10-2 \Rightarrow$
$2+2\cdot(2-2:a)=8:2 \Rightarrow 2\cdot(2-2:a)=4-2 \Rightarrow 2-2:a=2:2 \Rightarrow$
$2:a=2-1 \Rightarrow 2:a=1 \Rightarrow a=2:1 \Leftrightarrow a=2$.

c) $\{2\cdot[3+(a-4)\cdot5]:6\}\cdot7=8-1 \Rightarrow 2\cdot[3+(a-4)\cdot5]:6=7:7 \Rightarrow$
$2\cdot[3+(a-4)\cdot5]=6\cdot1 \Rightarrow 3+(a-4)\cdot5=6:2 \Rightarrow (a-4)\cdot5=3-3 \Rightarrow$
$a-4=0:5 \Rightarrow a-4=0 \Rightarrow a=4+0 \Rightarrow a=4$.

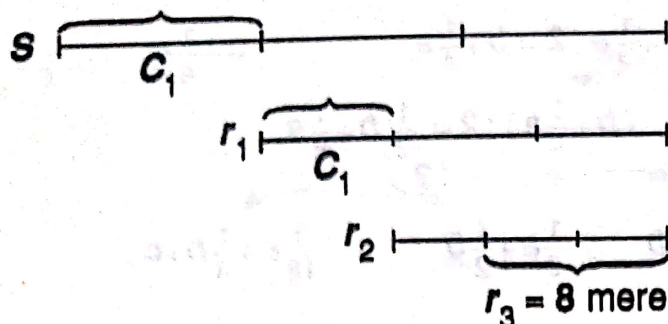
520. Suma inițială și cheltuielile pot fi reprezentate grafic astfel:



Cîți lei a costat pixul? $3\times126\times3=378\times3=1\ 134$ (lei).

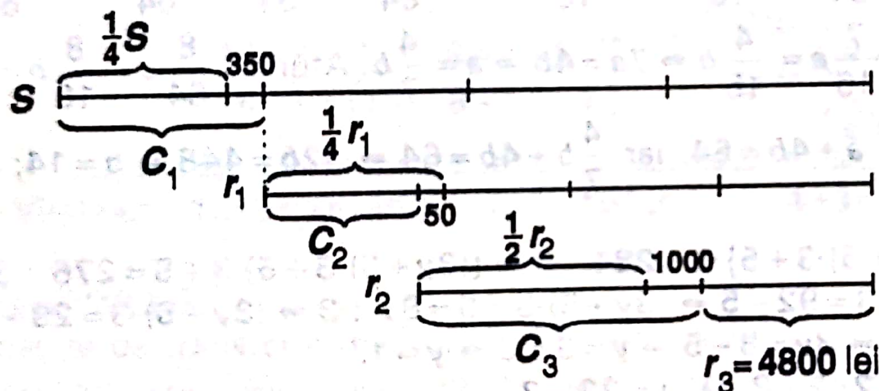
521. Pentru mai multe soluții la asemenea probleme, a se vedea rezolvările la **VIII.1. – VIII.8.** din volumul **1**. Notăm cu S numărul inițial de mere, cu C_1,

C_2, C_3 numărul de mere luate de fiecare copil, cu r_1, r_2, r_3, resturile corespunzătoare.



Relația esențială este cea din care aflăm că fiecare copil se crede „primul sosit", deci fiecare împarte numărul de mere, pe care le găsește pe masă cînd îi vine rîndul, în 3 părți la fel de mari (egale ca număr).
Din desen rezultă că 2 treimi din r_2 reprezintă 8 mere.
Atunci $r_2=8:2\times3=12$ (mere); $r_1=12:2\times3\Rightarrow r_1=18$; $S=18:2\cdot3\Rightarrow$ $S=27$ mere.

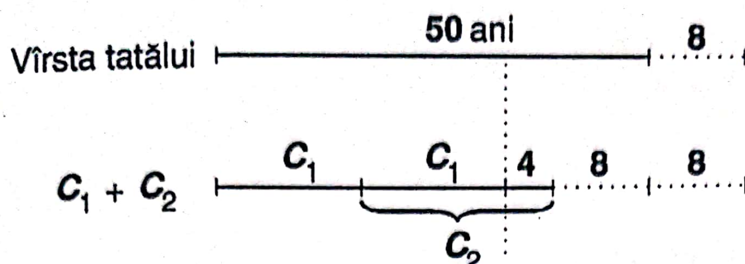
522. Păstrăm notațiile de mai sus, fiind, în principiu, aceleași operații:



$r_2=?$ $(4\,800+1\,000)\cdot2=5\,800\cdot2=11\,600$ (lei);
$C_3=5\,800+1\,000=6\,800$ (lei). $r_1=?$ $(11\,600-50):3\times4=15\,400$ (lei);
$C_2=15\,400:4-50=3\,800$ (lei). $S=?$ $(15\,400+350):3\times4=$
$=5\,250\times4=21\,000$ (lei). $C_1=21\,000:4+350=5\,600$ (lei).

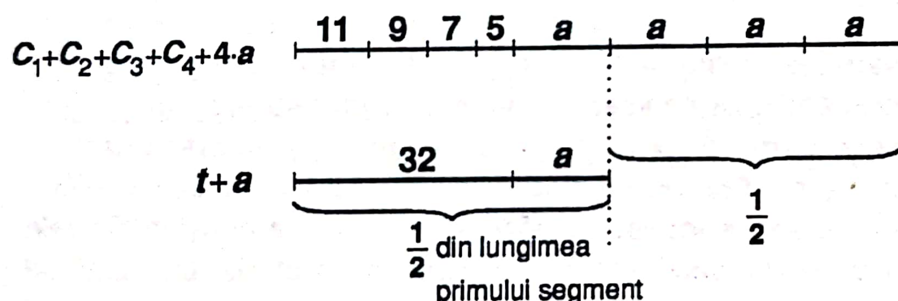
523. Ce sumă au cei doi împreună după ce au primit 1 000 lei?
$1\,000+1\,060+1\,000=3\,060$ (lei).
Ce sumă are fiecare după ce și-au împărțit banii primiți?
$3\,060:2=1\,530$ (lei).
Ce sumă a luat Andrei?
$1\,530-1\,000=530$ (lei).
Ce sumă a luat Alexandra?
$1\,530-1\,060=470$ (lei).

524. O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că dublul vîrstei copilului mic (c_1) este **50−4−8=38** (ani). Ce vîrstă are copilul mic, adică c_1=? **38 : 2=19** (ani). Dar celălalt? **19+4=23** (ani). <u>Sau</u>: Ce vîrstă <u>va avea</u> copilul mai mic <u>peste 8 ani</u>? **(50+8−4) : 2=27** (ani). Cîți ani are acum? **27−8=19** (ani). Dar celălalt? **19+4=23** (ani). (Pentru mai multe soluții, a se vedea **IV.12.** și **IV.13.** din vol. **1**).

525. a) Notăm cu a perioada care trece atît pentru tatăl, cît și pentru <u>fiecare</u> copil; cu t, c_1, c_2, c_3 și c_4, vîrstele tatălui și respectiv ale celor **4** copii. O reprezentare grafică se poate obține ușor dacă transformăm ultima relație din enunț, obținînd: „suma vîrstelor copiilor va fi de **2** ori mai mare decît vîrsta pe care o va avea tatăl lor”, adică:



Rezultă: **11+9+7+5+a=a+a+a ⇒32+a=3a ⇒2a=32 ⇒a=16.** Peste **16** ani tatăl va avea **48** ani, iar suma vîrstelor celor patru copii va fi: **32+4·16=96** (ani), iar **96 : 48=2.** (Rezolvarea algebrică este mult mai economicoasă).

b) Într-o eventuală reprezentare grafică, segmentul ce reprezintă vîrsta Monicăi de acum 4 ani trebuie să se împartă în mod convenabil în 4 părți (căci diferența se cuprinde de 4 ori), iar segmentul ce reprezintă vîrsta Irinei din același moment, în 3 asemenea părți. Dacă la fiecare segment adăugăm cîte 4 (ani) obținem vîrstele actuale. Dacă mai adăugăm cîte 4 ani, obținem vîrstele de peste 4 ani. Din desen și din enunț, va rezulta:
7 părți plus 16 ani = 2(3 părți plus 4 ani) + 12 ani. <u>Răspuns</u>: Monica are 20 ani, căci 4×4+4=20; Irina are 16 ani, deoarece 3×4+4=16.

CAPITOLUL III

Probleme de mişcare

Problemele de mişcare sînt acelea în care se cere să se afle una dintre mărimile: spaţiul (distanţa), viteza sau timpul, cînd sînt date diferite relaţii dintre acestea.

În clasele a III-a – a V-a, problemele se referă la mişcări uniforme. Mişcarea unui mobil este uniformă dacă în intervale de timp egale parcurge distanţe egale (deci viteza este constantă).

Spaţiul (*d* sau *S*) este lungimea drumului parcurs de un mobil. El se exprimă în metri, în multiplii sau submultiplii metrului.

Timpul (*t*) este numărul de unităţi de timp (secundă, minut, oră, zi etc.) în care se parcurge un anumit spaţiu.

Viteza (*v*) este numărul de unităţi de lungime parcurse de un mobil într-o singură unitate de timp. De aceea, viteza se exprimă prin unităţi de lungime pe (raportate la) unitatea de timp (m/s, km/h, m/min, km/s etc.).

Din cauză că viteza este o mărime derivată, în practică se observă că elevii întîmpină serioase dificultăţi în descoperirea ei în probleme. Aceasta se întîmplă şi datorită faptului că folosesc formulele (ecuaţiile) $d=v\cdot t$, $v=d:t$, $t=d:v$, realizîndu-se generalizări şi abstractizări pe baza a prea puţine exemple, a unui număr mic de rezolvări aritmetice a problemelor. În gimnaziu, problemele de mişcare sînt reluate sistematic abia în clasa a VI-a, doar la fizică, unde manualul, în capitolul „Fenomene mecanice", prezintă multe noţiuni care presupun o bază informaţională deja însuşită de elevi (de exemplu, a se vedea informaţiile necesare realizării graficului mişcării mecanice).

La matematică, în rezolvarea problemelor de mişcare, se pot folosi atît metodele aritmetice (figurativă, a comparaţiei, a falsei ipoteze etc.), cît şi cele algebrice.

Dată fiind specificitatea conţinutului acestor probleme, în practică ele sînt clasificate astfel.

A) probleme simple care cer aflarea:
- vitezei;
- distanţei;

– timpului;
– probleme combinate;
B) probleme de mişcare în sensuri contrare (de întîlnire a mobilelor);
C) probleme de mişcare în acelaşi sens (de urmărire a mobilelor);
D) probleme de compunere a vitezelor.
Această clasificare structurează şi prezentul capitol.

III. Enunţuri

526. Un atlet străbate distanţa de **40** m în **4** secunde, iar un biciclist în **8** secunde. Aceeaşi distanţă este parcursă de un copil în **20** secunde. Cine se mişcă cel mai încet? Cine parcurge distanţa în cel mai scurt timp? Scrieţi în ordine crescătoare timpii în care are loc fiecare deplasare. Pe baza unei reprezentări grafice, scrieţi formula de determinare a celor trei viteze, apoi ordonaţi-le crescător. Ce relaţie este între timpii şi vitezele corespunzătoare?

527. Ce viteză medie, exprimată în kilometri pe oră a avut un automobil care a parcurs distanţa de **320** km în **8** ore?

528. Un motociclist a plecat cu o viteză de **16** km/oră, urmînd să meargă **9** ore. După ce a străbătut **48** de km, a trebuit să se oprească timp de **2** ore. Cu ce viteză trebuie să-şi continue drumul pentru a ajunge la ora fixată?

529. Un autoturism se deplasează timp de **2** ore cu viteza de **40**km/h şi **3** ore cu viteza de **50** km/h. Să se determine viteza medie cu care a mers autoturismul.

530. Într-o duminică, Ovidiu îşi vizitează bunicii. La dus, fiind mai mult urcuş, el realizează o viteză medie de **30** m/minut, iar la întors o viteză medie de **60**m/minut. Aflaţi media vitezelor şi viteza medie cu care a parcurs Ovidiu întregul drum dus-întors.

531. Doi biciclişti pleacă din acelaşi loc în aceeaşi direcţie. Dacă primul merge **7** ore şi al doilea **3** ore, atunci primul parcurge cu **39** km mai mult decît al doilea, iar dacă primul ar merge **9** ore şi al doilea **6** ore, atunci primul ar parcurge cu **18** km mai mult decît al doilea. Aflaţi viteza fiecărui biciclist.

532. Un automobilist a parcurs distanţa dintre două oraşe în **5** ore. Dacă viteza automobilului ar fi fost cu **20** km mai mică, atunci ar fi parcurs aceeaşi distanţă în **7** ore. Aflaţi viteza automobilului şi distanţa dintre cele două oraşe.

533. Fie distanţa dintre oraşele A şi B. Precizaţi care dintre cele două autoturisme, **a** şi **b**, are viteza mai mare, dacă:
1) **a** parcurge o jumătate din distanţă în **3** ore, iar **b** parcurge o treime din aceeaşi distanţă în două ore;

2) a parcurge o jumătate din distanță în 2 ore, iar b parcurge o treime din distanță în 3 ore;
3) a parcurge un sfert din distanță în 3 ore, iar b parcurge o treime din aceeași distanță în 4 ore;
4) a parcurge un sfert din distanță în 4 ore, iar b parcurge o treime din aceeași distanță în 3 ore;
5) a parcurge o jumătate din distanță într-o jumătate de oră, iar b parcurge un sfert din aceeași distanță într-un sfert de oră;
6) a parcurge o jumătate din distanță într-un sfert de oră, iar b parcurge un sfert din aceeași distanță într-o jumătate de oră.

534. Ce distanță a parcurs un bicilist care, timp de 4 ore, s-a deplasat cu viteza de 12 km pe oră?

535. Elevii clasei a IV-a C din școala noastră au plecat în excursia „Turul Iașului" cu autocarul, care s-a deplasat cu viteza medie de 40 km pe oră. În prima parte a zilei, autocarul a mers 3 ore, iar după-amiază 2 ore. Ce distanță au parcurs elevii cu autocarul?

536. Cîți metri măsoară distanța dintre Soare și Pămînt, știind că o rază de lumină ce are viteza de 300 000 km/s o străbate în 5 secunde.

537. La ce distanță de noi s-a produs un zgomot, dacă viteza sunetului în aer este de 330 m/s, iar de la producerea lui au trecut 2 secunde?

538. Cîte secunde îi trebuie unui tren care are viteza de 20 m pe secundă ca să străbată un drum de 72 000 m?

539. Deplasîndu-se cu 4 km pe oră, în cît timp va străbate un drumeț distanța de 12 km?

540. Un pieton parcurge un drum dus-întors în 9 ore. La dus a avut viteza de 4 km pe oră, iar la întors 5 km pe oră. Aflați lungimea drumului.

541. Un biciclist străbate distanța de la D la I, avînd viteza de 9 km pe oră, într-un timp cu 2 ore mai mare decît cel de la întoarcere, cînd a avut viteza de 12 km pe oră. Care este distanța dintre localitățile D și I?

542. Un biciclist parcurge o anumită distanță în 28 de minute. El merge jumătate din distanță cu o viteză, iar cealaltă jumătate cu o viteză de 3 ori mai mare. În cît timp biciclistul parcurge a doua jumătate a distanței?

543. Întorcîndu-se de la bunici, ca să ajungă la tren, Dan și-a propus să parcurgă cei 18 km cu viteza medie de 6 km pe oră, mergînd pe jos. După ce a mers o parte din drum, s-a oprit o oră și a așteptat o trăsură care, deplasîndu-se cu o viteză dublă, l-a adus la tren în același timp pe care și l-a propus inițial. La ce distanță de gară s-a oprit Dan să aștepte trăsura?

544. Un motociclist pleacă la ora 9 din Bacău și trebuie să parcurgă 180 km ca să ajungă la orele 18, la Galați. Pe drum face 1 popas de două ore și, pentru a recupera timpul pierdut, el merge apoi cu o viteză medie cu 10 km mai mare decît cea propusă inițial. La ce distanță de Galați se oprește motociclistul prima dată?

545. Un motociclist și-a propus să parcurgă **72** km cu viteza de **200** m pe minut. Pe drum a observat că are o defecțiune la motocicletă care l-a determinat să-și întrerupă călătoria timp de **60** de minute. După ce a reparat motocicleta, a pornit cu o viteză de **3** ori mai mare, reușind să recupereze timpul pierdut. La ce distanță de punctul de pornire și-a întrerupt călătoria?

546. Aflîndu-se în localitatea A, Cristi dorește să ajungă cu bicicleta în localitatea B la ora **14**. Mergînd **3** ore, bicicleta se defectează, iar Cristi își continuă drumul pe jos, cu o viteză de **3** ori mai mică decît cu bicicleta, ajungînd în B la ora **18**. Dacă ar mai fi mers cu bicicleta încă **6** km de la locul în care aceasta se defectase, ar fi ajuns în B la ora **17**. Aflați viteza cu care se deplasează bicicleta, distanța dintre cele două localități și la ce oră a pornit Cristi la drum.

547. Un automobil merge **2** ore și se oprește pentru o oră. După această oprire, viteza este $\frac{3}{4}$ din viteza anterioară, ajungînd astfel la destinație cu **4** ore mai tîrziu. Dacă s-ar fi oprit cu **120** km mai departe, întîrzierea ar fi fost numai de **3** ore. Ce viteză a avut la început automobilul și care a fost toată distanța parcursă de acesta?

548. Din portul A, la ora **8**, pleacă o navă spre portul B, unde va ajunge a doua zi la aceeași oră. După un timp de la pornire, nava trece pe lîngă localitatea C, care se află la o distanță de **234** km față de portul B. Parcurgînd încă **54** km, nava trece pe lîngă localitatea D la ora **23**. Puteți afla distanța dintre portul A și localitatea C?

549. Un automobilist se întorcea acasă, venind spre orașul Suceava din orașul Vatra Dornei. El se gîndește: „Dacă aș merge **2** ore, mi-ar mai rămîne **6** km, iar dacă aș merge **2** ore și jumătate aș ajunge la fratele meu, care locuiește într-un sat la **20** km de casa mea". Aflați distanța dintre Suceava și Vatra Dornei.

550. Sorin dorește să ajungă, într-un anumit timp, de la Sibiu la Cluj-Napoca. Dacă ar merge cu o motocicletă cu o viteză medie de **28** km pe oră, ar întîrzia cu o oră, iar dacă ar merge cu un automobil cu o viteză medie de **42** km pe oră, ar sosi în Cluj-Napoca cu o oră mai devreme. Ce distanță este între Sibiu și Cluj-Napoca?

551. Plecînd din orașul A, un șofer a privit indicatorul kilometrajului de la mașina sa, care indica **16961** km, constatînd că oricum ar citi pe cadran, de la stînga la dreapta sau de la dreapta la stînga, numărul este același. Numai după **2** ore de mers, șoferul a avut surpriza să citească pe indicator un număr asemănător. Care era viteza automobilului?

552. Din două localități, situate la **110** km una de alta, pleacă în același timp, unul spre celălalt, doi bicicliști. Primul are o viteză medie de **12** km/h, iar al doilea, **10** km/h. După cîte ore se întîlnesc cei doi bicicliști?

553. Două trenuri au plecat din două gări, unul spre celălalt, la ora 10 dimineața și s-au întîlnit la ora 14, în aceeași zi. Primul tren a parcurs 60 km/h, iar al doilea, 55 km/h. Care este distanța dintre cele două gări?

554. Două vapoare au plecat în același timp, din două porturi, unul spre celălalt. Între porturi este o distanță de 200 km. Primul vapor străbate 25 km/h, iar al doilea, 30 km/h. Să se afle ce distanță a rămas între ele după 3 ore?

555. Între două orașe este o distanță de 184 km. Doi automobiliști pleacă în același timp, din cele două orașe, mergînd în sensuri contrare, avînd fiecare viteza de 46 km/h. După cîte ore se vor întîlni cei doi automobiliști?

556. Din localitatea A pleacă spre localitatea B un automobil cu viteza de 50 km/h, iar după o oră pleacă din localitatea B spre localitatea A un alt automobil, cu viteza de 60 km/h. Știind că automobilele s-au întîlnit la jumătatea distanței dintre cele două localități, aflați această distanță.

557. Doi bicicliști au plecat în același timp, din două localități, unul spre celălalt și s-au întîlnit după 6 ore. Primul a parcurs în 2 ore tot atît cît a parcurs al doilea în 4 ore. Care a fost viteza fiecăruia, știind că distanța dintre cele două localități este de 108 km?

558. Două mașini pornesc în același timp din A spre B, prima cu viteza de 24 km/h, iar a doua cu viteza de 56 km/h. Știind că distanța dintre A și B este de 280 km și că a doua mașină, după ce ajunge în B, fără să se oprească, se întoarce spre A, aflați după cîte ore de la plecare se întîlnesc?

559. Un biciclist pleacă din localitatea A spre localitatea B, mergînd cu 12 km/h. După o jumătate de oră, pleacă din localitatea A un autoturism care ajunge biciclistul la o distanță de 9 km față de A. După ce biciclistul a mai parcurs 6 km, este întîlnit de același autoturim care se întorcea din localitatea B, unde a stat un sfert de oră. Aflați viteza autoturismului și distanța dintre cele două localități.

560. Doi atleți, primul avînd viteza de 4 m/s, al doilea, 7 m/s, au plecat simultan, unul către celălalt, din două puncte diferite ale cartierului Dacia și s-au întîlnit la 60 m depărtare de jumătatea distanței pe care au parcurs-o împreună. Ce distanță a parcurs fiecare, pînă cînd s-au întîlnit?

561. Din orașele Galați și Ploiești, aflate la o distanță de 210 km, pornesc unul spre celălalt, în același timp, doi motocicliști. Viteza medie a motociclistului care pleacă din Galați este $\frac{3}{4}$ din viteza medie a celuilalt motociclist. După 2 ore de la pornire, cei doi mai aveau de parcurs, pînă la întîlnirea lor, 70 de km. Aflați viteza medie a fiecărui motociclist.

562. Din cele două capete, A și B, ale unei piste sportive, pornesc simultan, unul către celălalt, doi atleți. Ei se întîlnesc prima dată la 48 m de A, își continuă drumul fără oprire, ajung la capete, se reîntorc, întîlnindu-se apoi a doua oară. A treia oară s-au întîlnit chiar în capătul A, după 60 de secunde de la plecare. Aflați lungimea pistei de la A la B și vitezele celor doi atleți.

563. Distanța dintre două localități este de **258** km. Doi automobiliști pleacă în același timp din aceste localități și merg, unul către celălalt. Viteza unuia este cu **17** km/h mai mare decît a celuilalt. Ei se întîlnesc după **2** ore de la plecare. Aflați viteza fiecăruia dintre cele două autoturisme.

564. Un biciclist a plecat din localitatea A spre localitatea B, situate la o distanță de **288** km una față de alta. După **8** ore de mers, din B a plecat spre biciclist un motociclist ce avea o viteză de **3** ori mai mare. Cei doi s-au întîlnit la jumătatea drumului. Care a fost viteza biciclistului și a motociclistului?

565. Un biciclist a plecat la ora **10** din orașul A spre orașul B. După **2** ore a plecat din B spre A un motociclist cu viteza de **3** ori mai mare, întîlnind pe biciclist la jumătatea drumului. Știind că distanța dintre orașe este de **60** km, aflați viteza de mers a fiecăruia și la ce oră de la plecarea biciclistului se întîlnesc cei doi.

566. Din două orașe pleacă în același timp două mașini, una spre alta: prima cu viteza de **80** km/h, a doua cu viteza de **70** km/h. Cînd se întîlnesc, o mașină trece de mijlocul distanței cu **10** km. Ce distanță este între cele două orașe?

567. Doi bicicliști pleacă în același timp, unul spre celălalt, dorind să se întîlnească în **4** ore și să străbată astfel distanța de **84** km. Știind că pînă la întîlnire unul a parcurs cu **4** km mai mult decît celălalt, aflați viteza fiecărui biciclist.

568. Un motociclist din localitatea A și un biciclist din localitatea B pleacă la ora **8**, unul către celălalt și se întîlnesc la ora **11**. Știind că motociclistul merge cu o viteză medie de **3** ori mai mare decît viteza biciclistului, aflați ora la care ajunge fiecare în localitatea de unde a plecat celălalt.

569. Din două localități pleacă, la ora **8**, una spre cealaltă, două mașini; prima, avînd viteza de **2** ori mai mare, ajunge la ora **12** în localitatea de unde plecase a doua. Aflați: a) ora la care a ajuns a doua mașină în localitatea de unde a plecat prima mașină; b) la ce oră s-au întîlnit cele două mașini.

570. La ora **7**, un pieton pleacă spre orașul B din localitatea A. După o oră, din aceeași localitate pleacă un autobuz care depășește pietonul la ora **8** și **12** minute. Ajungînd în B, fără să se oprească, autobuzul se întoarce și întîlnește pietonul la ora **9**. Știind că distanța dintre cele două localități era de **24** km, aflați, în metri pe minut, viteza de deplasare a pietonului și a autobuzului.

571. Rilă-Iepurilă și Urechilă, doi iepurași poznași, și-au ales ca antrenor, pentru alergările lor, pe un graur, care zboară cu o viteză medie de **90** km/h. Într-o zi, graurul a obligat pe cei doi iepurași să se depărteze unul de altul la o distanță de **400** m. La un semnal, iepurașii au pornit-o unul spre celălalt, Rilă-Iepurilă cu o viteză de **2** m/s, iar Urechilă cu **3** m/s. În tot acest timp, graurul zbura de la un iepuraș la celălalt, îndemnîndu-i să alerge cît mai repede. De-abia cînd cei doi iepurași s-au întîlnit, s-a oprit și graurul, încercînd să calculeze ce distanță a parcurs în zborul său de încurajare. Îl puteți ajuta?

572. Un automobilist, care intra într-un tunel de **10** km, mergînd cu o viteză de **40** km/h, a fost depășit de o rîndunică ce zbura cu o viteză de **4** ori mai mare. Cînd să iasă din tunel, rîndunica s-a speriat și s-a întors pînă în dreptul automobilului, apoi din nou s-a îndreptat spre ieșire. Ajunsă la ieșire, iar s-a întors. A continuat astfel să zboare între automobil, care se tot apropia, și ieșirea din tunel, într-un du-te-vino continuu, pînă ce mașina a ieșit din tunel. Ce distanță a parcurs rîndunica în interiorul tunelului?

573. Un motociclist pleacă din orașul A cu o viteză medie de **30** km pe oră. După **4** ore, pleacă din același oraș și în același sens un autoturism, care are o viteză medie de **60** km pe oră. După cît timp autoturismul va ajunge pe motociclist?

574. Doi bicicliști, primul cu viteza de **12** km pe oră, al doilea cu **9** km pe oră, pleacă spre aceeași localitate, din același loc, în același timp. Cînd primul a ajuns la destinație, al doilea mai avea de parcurs încă **18** km. Aflați distanța dintre cele două localități.

575. Doi pietoni pornesc în același timp din localitatea A și merg spre localitatea B. Primul pieton are viteza de **6** km pe oră, iar al doilea, **4** km pe oră. Primul ajunge în B cu o oră și jumătate înaintea celui de-al doilea. Care este distanța dintre cele două localități?

576. Un motociclist, mergînd cu aceeași viteză, parcurge în **8** ore **208** km, distanța de la Ploiești la Miercurea Ciuc. După **2** ore de la plecarea motociclistului din Ploiești, pornește după el un automobilist. Care era viteza medie a automobilistului, știind că îl ajunge pe motociclist la o distanță de **52** km de Miercurea Ciuc?

577. Doi bicicliști au plecat din același loc, în același timp și în aceeași direcție. Primul are viteza medie de **6** m/s, iar al doilea **4** m/s. După **5** minute de la plecare, primul biciclist s-a oprit să verifice roțile bicicletei. Urmărindu-l apoi pe al doilea, i-au fost necesare **7** minute ca să îl ajungă. Cît timp s-a oprit primul biciclist pentru verificarea roților?

578. Din localitatea A au plecat în același timp și în același sens două autoturisme, primul cu viteza medie de **48** km/h, celălalt cu **36** km/h. După **2** ore, primul autoturism își întrerupe deplasarea, datorită unei defecțiuni. Reluîndu-și călătoria, i-au fost necesare **4** ore ca să îl ajungă pe celălalt. Cît timp a staționat prima mașină?

579. Un motociclist, mergînd cu **40** km pe oră, se află înaintea altui motociclist, care merge în același sens cu viteza de **60** km pe oră. Determinați distanța care se află la început între ei, știind că după **15** minute de la plecarea celui de-al doilea motociclist, acesta l-a depășit pe primul.

580. Doi motocicliști și un biciclist pornesc în același timp din orașul A spre orașul B. Știind că primul motociclist merge cu viteza de **50** km/h și ajunge în orașul B la ora **8**, al doilea motociclist are o viteză de **30** km/h și ajunge în orașul B la ora **10**, să se afle la ce oră sosește biciclistul în orașul B, dacă acesta are o viteză de **10** km/h.

581. Din orașul A, situat la **240** km de orașul B, pleacă la interval de **4** ore, unul după altul, un ciclist și un motociclist, cu vitezele respectiv de **20** km/h și de **60** km/h. Știind că motociclistul pornește la ora **11** și că, ajungînd în orașul B, se întoarce spre orașul A fără să se oprească, să se afle la ce oră și la ce distanță de orașul B îl întîlnește pe ciclist.

582. Alex, Tibi și Dinu se joacă în curtea școlii „de-a atleții". Își stabilesc distanța de parcurs, iar Oana, „arbitrul", consemnează rezultatele cronometrate: timpul necesar lui Tibi a fost cu **2** secunde mai mic decît timpul lui Alex, dar cu **2** secunde mai mare decît timpul necesar lui Dinu. Calculîndu-și vitezele, ei află că Alex a avut viteza medie de **3** m/s, iar Dinu **6** m/s. Puteți afla viteza medie a lui Tibi?

583. Un biciclist, cu viteza de **360** m/min, se deplasează pe o șosea pe care își face încălzirea o coloană de sportivi ce are o viteză de **60** m/min.
a) Dacă coloana se deplasează în sens contrar biciclistului, acestuia îi trebuie **5** secunde pentru a merge de la un capăt la altul al coloanei.
b) Dacă biciclistul merge în același sens deplasării coloanei, acestuia îi trebuie **7** secunde pentru a merge de la un capăt la altul al coloanei.
Aflați de fiecare dată, lungimea coloanei de sportivi.

584. Un călător, care mergea într-un tren de persoane ce avea viteza de **10** m/s, a observat că un tren accelerat, care mergea în sens contrar, a trecut pe lîngă el în **2** secunde. Aflați viteza acceleratului, știind că lungimea sa era de **50** m.

585. Pe o cale ferată dublă, circulă, pe o linie, un tren accelerat lung de **42** m. Pe cealaltă linie circulă un tren personal lung de **60** m. Dacă trenurile merg în același sens, acceleratul trece de celălalt tren în **17** secunde, iar dacă trenurile merg în sens contrar, acceleratul trece pe lîngă trenul personal în **3** secunde. Care sînt vitezele celor două trenuri?

586. Pe o cale ferată dublă, circulă, pe o linie, un tren cu viteza de **72** km/h și cu lungimea de **326** m. Pe cealalată linie, circulă un alt tren lung de **374** m cu viteza de **54** km/h. a) Să se afle timpul cît durează trecerea unui tren pe lîngă celălalt, dacă merg în sensuri contrare. b) Să se afle cît timp durează trecerea unui tren pe lîngă celălalt, dacă ambele trenuri merg în același sens.

587. Un ogar urmărește o vulpe care are **15** sărituri înaintea lui. Cîte sărituri va face pînă să ajungă vulpea, dacă el face **2** sărituri în timp ce vulpea face **3**, iar în **3** sărituri ogarul parcurge aceeași distanță pe care vulpea o străbate în **5** sărituri.

588. Cîte sărituri trebuie să facă un cîine pentru a ajunge un iepure care este la **75** de sărituri în fața lui, știind că în timp ce cîinele face **2** sărituri, iepurele face **3**, iar **5** sărituri de-ale iepurelui fac cît **2** de-ale cîinelui.

589. Un cîine urmărește o pisică ce se află la **24** de sărituri în fața lui. Să se afle după cîte sărituri cîinele ajunge pisica, știind că, în timp ce cîinele face **5**

sărituri, pisica face **6** sărituri, iar **5** sărituri de-ale cîinelui fac cît **8** sărituri de-ale pisicii.

590. Un ogar urmăreşte o vulpe care este distanţată la **60** de sărituri faţă de acesta. Vulpea face **9** sărituri în timp ce ogarul face **6**, iar **3** sărituri de-ale ogarului fac cît **7** de-ale vulpii. Peste cîte sărituri ogarul va ajunge vulpea?

591. Modificaţi problema anterioară, eliminînd din enunţ relaţia referitoare la ritmul săriturilor, apoi rezolvaţi-o.

592. a) Trei copii, A, B şi C participă la o cursă atletică de **100** m. Cînd A termină cursa, B era în urma lui cu **10** m. Cînd B termină cursa, C era în urma acestuia cu **10** m. La ce distanţă de A se afla C atunci cînd primul a ajuns pe linia de sosire, ştiind că fiecare are un ritm constant în alergare.
b) Dan şi Ionuţ se întrec la fugă. Deoarece Dan aleargă de 3 ori mai repede decît Ionuţ, ei convin ca punctele de plecare să fie la o distanţă de 30 m unul faţă de altul. Ştiind că au plecat şi au ajuns deodată la punctul de sosire, aflaţi cîţi metri parcurge fiecare copil.

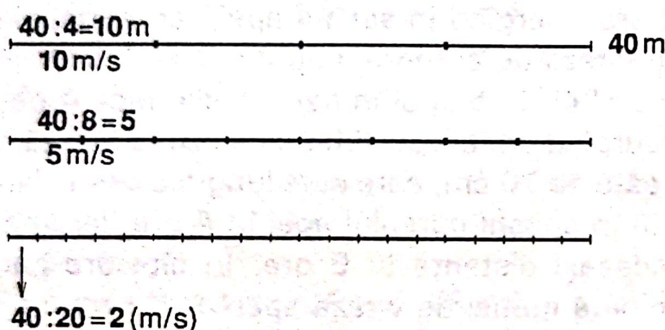
593. Un vapor face **20** km în **2** ore, mergînd în sensul apei, iar la înapoiere, în contra apei, în **4** ore. Aflaţi viteza de curgere a apei.

594. Vasile şi Ion merg unul lîngă altul. În timpul în care Vasile face **4** paşi, Ion face **7** paşi, amîndoi parcurgînd în acest timp aceeaşi distanţă. Dacă lungimea pasului lui Vasile este de **70** cm, care este lungime pasului lui Ion?

595. O barcă parcurge o distanţă în sensul cursului apei în **4** ore, iar împotriva curentului apei parcurge aceeaşi distanţă în **5** ore. În cîte ore parcurge aceeaşi distanţă o luntre mînată numai de viteza apei?

III. Soluții și răspunsuri

526. Pentru a răspunde la primele două întrebări, scriem cele trei durate (t) ale mișcării astfel: $t_a=4$ s; $t_b=8$ s; $t_c=20$ s. Fiind aceeași distanță, rezultă că $t_a<t_b<t_c$, căci $4<8<20$. Se observă că distanța de 40 m este străbătută de atlet în timpul cel mai scurt, iar de către copil în timpul cel mai mare (el se mișcă cel mai încet). Din ce cauză $t_a<t_b<t_c$? Reprezentăm grafic distanța de 40 m printr-un segment pe care îl împărțim în 4 părți egale, apoi în 8 părți egale și, respectiv, în 20 părți egale, pentru a arăta cîți metri sînt parcurși într-o <u>singură secundă</u>, în fiecare caz:



Din desen, rezultă că <u>într-o singură secundă</u> atletul parcurge 10 m, biciclistul 5 m, iar copilul 2 m. Cînd avem numere mari, un asemenea desen este greu de realizat și atunci apelăm la judecată, pe care o putem formula astfel: dacă în 4 s atletul parcurge 40 m, într-o singură secundă parcurge de 4 ori mai puțin decît 40 (deoarece și 1 este mai mic decît 4 de 4 ori), adică $40 : 4=10$ (m într-o secundă, pe scurt 10 m/s); dacă în 8 s biciclistul parcurge 40 m, într-o singură secundă parcurge de 8 ori mai puțin decît 40, căci și 1 este mai mic decît 8 de 8 ori, adică $40 : 8=5$ (m/s); similar și pentru viteza copilului: 2 m/s. Dacă viteza (v) înseamnă distanța parcursă <u>într-o unitate</u> de timp, aici într-o secundă, rezultă că pentru a afla viteza unui mobil, împărțim distanța parcursă la timpul în care are loc deplasarea, adică $d : t=v$. Dacă <u>într-o secundă</u>, atletul parcurge 10 m, iar copilul numai 2 m, rezultă că viteza atletului este mai mare decît viteza copilului, adică $v_a>v_b>v_c$. Să scriem relațiile dintre cei trei timpi și dintre cele 3 viteze, toate referindu-se la <u>aceeași distanță</u>: $t_a<t_b<t_c$, adică 4 s < 8 s < 20 s, iar $v_a>v_b>v_c$, adică 10 m/s > 5 m/s > 2 m/s. Se observă că:
– $t_a<t_b$ de 2 ori, căci $8 : 4=2$; atunci $v_a>v_b$ de 2 ori, căci $10 : 5=2$.
– $t_a<t_c$ de 5 ori, căci $20 : 4=5$; atunci $v_a>v_c$ de 5 ori, căci $10 : 2=5$ etc.

Fiind aceeași distanță, dacă viteza crește de un număr de ori, atunci timpul necesar se micșorează de același număr de ori. (A se vedea problemele III.26; IX.4; IX.44; IX.45 din volumul 1 și problemele 527-593 din prezentul volum).

527. Se cere viteza medie, adică se presupune că în fiecare oră automobilul a parcurs aceeași distanță, deși în practică nu se prea întîmplă acest lucru (în funcție de condițiile întîlnite pe parcurs, automobilul frînează sau accelerează). Dacă în **8** ore automobilul a parcurs **320** de km, într-o singură oră a parcurs de **8** ori mai puțin decît **320** km (căci și **1** este mai mic decît **8** de **8** ori), adică **320 : 8 = 40** (km/oră). Această judecată se poate scrie pe scurt: $v = 320 : 8 = 40$ (km/oră) $\Rightarrow v = d : t$.

528. Ce distanță trebuia să parcurgă? **16 × 9 = 144** (km).
Ce distanță a rămas de parcurs? **144 − 48 = 96** (km).
În cît timp a parcurs cei **48** de km? **48 : 16 = 3** (ore).
În cît timp a parcurs restul distanței? **9 − 3 − 2 = 4** (ore).
Cu ce viteză și-a continuat drumul? **96 : 4 = 24** (km/h).

529. Ce distanță a parcurs în **2** ore? **2 × 40 = 80** (km)
Ce distanță a parcurs în **3** ore? **3 × 50 = 150** (km).
Ce distanță a parcurs în total (în cele **5** ore)? **80 + 150 = 230** (km).
Care a fost viteza medie a autoturismului? **230 : 5 = 46** (km/h).

530. Media celor două viteze este: **(60 + 30) : 2 = 45** (m/min.).
Spre deosebire de aceasta, viteza medie se calculează împărțind distanta la timpul necesar parcurgerii ei. Dacă notăm cu d lungimea drumului parcurs de către Ovidiu pînă la bunici, cu t_1 timpul necesar la dus, iar cu t_2 timpul necesar la întors, obținem: $30 = d : t_1$, iar $60 = d : t_2$. Ni se cere însă viteza medie pentru întreg drumul (dus-întors), adică distanța parcursă de Ovidiu este $2d$, iar timpul necesar este $t_1 + t_2$. Atunci viteza medie se obține astfel: $2d : (t_1 + t_2)$. Dar nu cunoaștem nici d și nici $t_1 + t_2$. Ce am putea înlocui?

Dacă $t_1 = d : 30 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{30}$, iar $t_2 = \frac{d}{60}$. Deci $t_1 + t_2 = \frac{d}{30} + \frac{d}{60} = \frac{3d}{60} = \frac{d}{20}$.

Atunci viteza medie este $2d : \frac{d}{20} = 2d \cdot \frac{20}{d} = 40$ (m/min).

531. Se știe că $d = v \cdot t$. Distanța parcursă de primul biciclist în **7** ore este $7v_1$, iar de al doilea în **3** ore, $3v_2$.
Din enunț rezultă: $7v_1 = 3v_2 + 39$ km, iar $9v_1 = 6v_2 + 18$ km.
Pentru a avea același termen de comparație, înmulțim fiecare membru al primei egalități cu **2** și obținem: $14v_1 = 6v_2 + 78$ km, iar $9v_1 = 6v_2 + 18$ km.
Scăzînd relațiile, membru cu membru, rezultă:
$5v_1 = 60$ km $\Rightarrow v_1 = 60 : 5 \Rightarrow v_1 = 12$ km/h.
Atunci $7 \times 12 = 3v_2 + 39 \Rightarrow 84 = 3v_2 + 39 \Rightarrow v_2 = 45 : 3 \Rightarrow v_2 = 15$ km/h.

532. Se știe că $d = v \cdot t$. Fiind aceeași distanță, rezultă:
$5v = 7(v - 20) \Rightarrow 7v - 140 = 5v \Rightarrow 2v = 140 \Rightarrow v = 140 : 2 \Rightarrow v = 70$ km/h.

533. 1) Dacă ***a*** parcurge o jumătate din distanță în **3** ore, atunci toată distanța o parcurge în $2 \times 3 = 6$ ore; dacă ***b*** parcurge o treime din distanță în **2** ore, atunci toată distanța (**3** treimi) o parcurge în $3 \times 2 = 6$ ore; deci vitezele sînt egale.

2) Dacă ***a*** parcurge o jumătate din distanță în **2** ore, toată distanța va fi parcursă în **4** ore; dacă ***b*** parcurge o treime din distanță în **3** ore, atunci toată distanța este parcursă în **9** ore; deci viteza lui ***a*** este mai mare, căci timpul necesar este mai mic, distanța fiind aceeași.

3) ***a*** parcurge toată distanța în $4 \times 3 = 12$ ore, iar ***b*** parcurge aceeași distanță în $3 \times 4 = 12$ ore; deci vitezele sînt egale.

4) ***a*** parcurge toată distanța în $4 \times 4 = 16$ ore, iar ***b*** parcurge aceeași distanță în $3 \times 3 = 9$ ore; deci viteza lui ***b*** este mai mare, căci timpul necesar este mai mic.

5) ***a*** parcurge toată distanța într-o oră, iar ***b*** parcurge toată distanța tot într-o oră; deci vitezele sînt egale.

6) ***a*** parcurge toată distanța într-o jumătate de oră, iar ***b*** parcurge aceeași distanță în **4** jumătăți de oră, adică în **2** ore; deci viteza lui ***a*** este mai mare.

534. Reprezentarea grafică a relațiilor dintre mărimile date poate fi:

$v = d / 1$ oră |—12 km—|

d în **4** ore |——|——|——|——| → 4x12=48 (km)

Dacă într-o oră bicicleta parcurge **12** km, atunci în **4** ore parcurge de **4** ori cîte **12**, adică $4 \times 12 = 48$ km. Dar ce reprezintă **4**? Timpul (t) în care biciclistul parcurge toată distanța (d). Dar **12**? Distanța parcursă într-o singură oră, adică **12** km pe oră, deci viteza v. Rezultă: $d = t \cdot v$.

535. Reprezentarea grafică a relațiilor poate fi:

$v = d / 1$ oră |—40 km—|

d în **3** ore |——|——|——|

d în **2** ore |——|——| } ? km

Din desen, rezultă că putem parcurge două căi: Cîți km a parcurs autocarul în **3** ore? $3 \times 40 = 120$ (km). Cîți km a parcurs autocarul în **2** ore? $2 \times 40 = 80$ (km). Cîți km a parcurs în total? $120 + 80 = 200$ (km). Sau: Cîte ore au mers elevii cu autocarul? $3 + 2 = 5$ (ore). Ce distanță a parcurs autocarul în **5** ore? $5 \times 40 = 200$ (km). În exercițiu, cele două rezolvări:
$d = t_1 \cdot v + t_2 \cdot v \Rightarrow \quad d = 3 \cdot 40 + 2 \cdot 40 \Rightarrow \quad d = 200$ (km) sau $d = t_1 \cdot v + t_2 \cdot v \Rightarrow$
$d = v(t_1 + t_2) \Rightarrow d = 40(3 + 2) \Rightarrow d = 40 \cdot 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 40 + 2 \cdot 40 \Rightarrow d = 200$ (km).

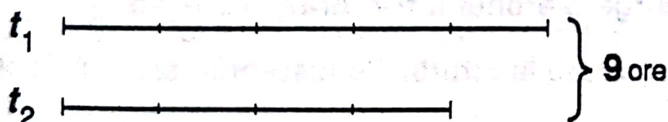
536. $d = v \cdot t \Rightarrow d = 300\ 000 \cdot 5 = 1\ 500\ 000$ km $= 1\ 500\ 000\ 000$ m.

537. $d = v \cdot t \Rightarrow d = 330 \cdot 2 = 660$ m

538. Dacă într-o secundă trenul parcurge o distanţă de **20** m, în cîte secunde va străbate o distanţă de **72 000** m?
În atîtea secunde de cîte ori **20** se cuprinde în **72 000**, adică **72 000 : 20 = 3 600** secunde.
<u>Sau</u>: Dacă pentru a parcurge o distanţă de **20** m, trenul are nevoie de o secundă, atunci pentru **72 000** m trebuie atîtea secunde cîte grupe de **20** m putem organiza din **72 000** m, adică **72 000 : 20 = 3 600** (s).
Dar **72 000** m reprezintă distanţa (d), **20** m/s reprezintă viteza medie, iar **3600** secunde reprezintă timpul în care are loc deplasarea.
Deci $t = d : v$.

539. Dacă într-o oră drumeţul parcurge **4** km, distanţa de **12** km este străbătută în atîtea ore de cîte ori **4** se cuprinde în **12**
(sau: atîtea ore cîte grupe de **4** km se pot face din **12** km), adică **12 : 4 = 3** ore.
Deci $t = d : v \Rightarrow t = 12 : 4 \Rightarrow t = 3$ ore.

540. <u>Rezolvarea 1</u>
Asemănătoare cu problema III.26, IX.9 din vol.1. Se ştie că $d = v_1 \cdot t_1$ sau $d = v_2 \cdot t_2$.
Dacă $v_1 = 4$ km/oră, iar $v_2 = 5$ km/oră, putem compara prin raport (de cîte ori este mai mare sau mai mică una faţă de cealaltă), deoarece este aceeaşi distanţă: $v_1 : v_2 \Rightarrow 4 : 5 \Rightarrow v_1 = \frac{4}{5}$ din v_2.
Atunci t_2 este cît $\frac{4}{5}$ din t_1, căci dacă viteza creşte, la acelaşi spaţiu, timpul se micşorează de acelaşi număr de ori.
Rezultă că timpul necesar parcurgerii distanţei la dus (t_1) constituie **5** părţi egale, iar timpul necesar la întors (t_2), **4** asemenea părţi, adică:



Rezultă: $t_1 = 9 : (5+4) \times 5 = 5$ ore; $t_2 = 9 : (5+4) \times 4 = 4$ ore.
Care este lungimea drumului (d)? $d = v_1 \cdot t_1 \Rightarrow d = 4 \cdot 5 = 20$ km, sau: $d = v_2 \cdot t_2 \Rightarrow d = 5 \cdot 4 = 20$ km.

<u>Rezolvarea 2</u>
Se ştie că $d = v \cdot t$.
Dacă $v_1 = \frac{4}{5} \cdot v_2 \Rightarrow t_2 = \frac{4}{5} \cdot t_1$ atunci $t_1 + \frac{4}{5} t_1 = 9$ ore $\Rightarrow \frac{9}{5} t_1 = 9$ ore $\Rightarrow$
$t_1 = 9 : 9 \times 5 \Rightarrow t_1 = 5$ ore. Deci $d = 4 \cdot 5 = 20$ km.
(Se poate calcula d, ştiind că $t_1 = \frac{5}{4} t_2$).

Rezolvarea 3

Pietonul parcurge la dus **1** km doar într-un sfert de oră ($\frac{1}{4}$ oră), iar la întoarcere în a cincea parte ($\frac{1}{5}$) dintr-o oră. Rezultă că **2** km, unul la dus și unul la întors, sînt parcurși de pieton în $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ ore. Dacă în $\frac{9}{20}$ oră pietonul străbate **2** km, dus și întors, în **9** ore, cîte asemenea distanțe parcurge (care este lungimea drumului)? $9 : \frac{9}{20}=9\cdot\frac{20}{9}=20$ (km); $2\times 20 : 2=20$ (km).

Rezolvarea 4

La întoarcere, în timp de o oră, pietonul parcurge **5** km. La dus, distanța de **5** km este parcursă într-un timp mai mare (viteza este mai mică), adică în $\frac{5}{4}$ ore. În cît timp parcurge **5** km la dus și **5** km la întors, adică **10** km? $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ ore. Cîți km parcurge pietonul într-o oră? $10 : \frac{9}{4}=10\cdot\frac{4}{9}=\frac{40}{9}$ (km), din care jumătate la dus, jumătate la întors. Ce distanță parcurge în **9** ore? $9\cdot\frac{40}{9}=40$ (km). Rezultă că jumătate din **40** km este lungimea drumului, adică **40 : 2 = 20** km.

Rezolvarea 5

(O altă variantă a raționamentului de mai sus) La dus, în timp de o oră, pietonul parcurge **4** km. La întoarcere distanța de **4** km este parcursă în $\frac{4}{5}$ oră. În cît timp parcurge **4** km la dus și **4** km la întors, adică **8** km? $1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$ ore. Cîți km parcurge pietonul într-o oră? $8 : \frac{9}{5}=8\cdot\frac{5}{9}=\frac{40}{9}$ (km), din care jumătate la dus, jumătate la întors. Ce distanță parcurge în **9** ore? $9\cdot\frac{40}{9}=40$ (km). Rezultă că jumătate din **40** km este lungimea drumului, adică **40 : 2 = 20** km.

Rezolvarea 6. Falsă ipoteză

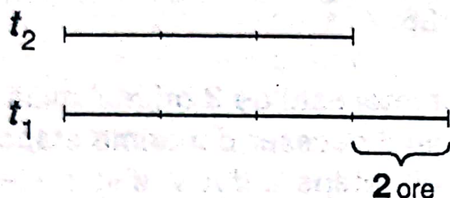
Presupunem că lungimea drumului este de **40** km (un multiplu de **4** și **5**).
În această ipoteză, care ar fi timpul la dus (t_1)? **40 : 4 = 10** (ore).
Dar timpul la întoarcere (t_2)? **40 : 5 = 8** (ore).
Timpul total (dus-întors) ar fi **10 + 8 = 18** (ore).
În realitate timpul total este de **9** ore, deci de **18 : 9 = 2** ori mai mic decît cel presupus de noi.
Atunci drumul este de **40 : 2 = 20** km, căci dacă micșorăm timpul necesar se micșorează și distanța de același număr de ori.

Rezolvarea 7

Notăm cu *d* lungimea drumului. Se ştie că $d : v = t$. Atunci $t_1 = d : v_1$, iar $t_2 = d : v_2$, iar $\frac{d}{4} + \frac{d}{5} = 9 \Rightarrow \frac{5d+4d}{20} = 9 \Rightarrow 9d = 9 \cdot 20 \Rightarrow d = 20$ (km).

541. Rezolvarea 1

De cîte ori este mai mare viteza la întoarcere faţă de cea la dus? $12 : 9 = 4 : 3 = 1\frac{1}{3}$ ori. Rezultă că timpul la dus (t_1) este de $1\frac{1}{3}$ ori mai mare decît timpul necesar la întoarcere (t_2), distanţa fiind aceeaşi. Putem apela la următoarea reprezentare grafică:



Rezultă că $\frac{1}{3}$ din t_2 reprezintă 2 ore, căci $t_1 - t_2 = 2$ ore, iar 4 părţi − 3 părţi = 1 parte. Atunci $t_2 = 3 \times 2 = 6$ ore, iar $t_1 = 4 \times 2 = 8$ ore sau $t_1 = 6 + 2 = 8$ ore. Distanţa dintre D şi I este de 72 km, căci $6 \times 12 = 72$ (km) sau $8 \times 9 = 72$ (km).

Rezolvarea 2

Dacă la dus, într-o oră parcurge 9 km, iar la întoarcere 12 km, rezultă că într-o oră la dus rămîne în urmă cu 3 km faţă de o oră la întors, căci $12 - 9 = 3$ (km). Cu cîţi km rămîne în urmă la tot drumul spre I? $2 \times 9 = 18$ (km). Aceşti 18 km sînt acumulaţi cîte 3 în fiecare oră din cele necesare parcurgerii distanţei la întoarcere. În cît timp a parcurs distanţa la întoarcere? $18 : 3 = 6$ (ore). Care este distanţa dintre cele două localităţi? $6 \times 12 = 72$ (km) sau: $t_2 = 6 + 2 = 8$ (ore); $d = 8 \times 9 = 72$ (km).

Rezolvarea 3

Dacă la întoarcere, biciclistul ar fi mers tot atîta timp cît la dus, adică încă 2 ore, biciclistul ar fi parcurs în plus $2 \times 12 = 24$ km. Fiind acelaşi timp, diferenţa de 24 km s-ar acumula din cauza diferenţei de viteze, adică $12 - 9 = 3$ (km/oră). În cît timp se acumulează diferenţa de 24 km? $24 : 3 = 8$ (ore). Care este distanţa dintre cele două localităţi? $8 \times 9 = 72$ (km) sau $(8 - 2) \times 12 = 72$ (km).

Rezolvarea 4

Presupunem că distanţa dintre I şi D este un număr de km (oarecare). Pentru uşurarea calculelor luăm un număr care se împarte exact la 9 şi 12. De exemplu, 36 km. În cît timp ar parcurge drumul la dus? $36 : 9 = 4$ (ore). Dar la întors? $36 : 12 = 3$ (ore). Care este diferenţa de timp dintre cele două

deplasări? $4-3=1$ (oră). Ipoteza este falsă. În problemă, diferenţa dată este de 2 ore. De cîte ori mai mare decît 1 oră? $2:1=2$ (ori). Cîţi km are distanţa dintre D şi I? $2\times36=72$ (km).

Rezolvarea 5

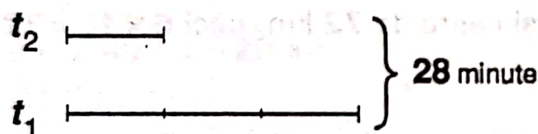
Notăm cu y numărul de ore necesare parcurgerii drumului la întoarcere. Fiind aceeaşi distanţă, rezultă: $9(y+2)=12y \Rightarrow 9y+18=12y \Rightarrow y=6$; distanţa este de $6\times12=72$ km.

Rezolvarea 6

Notăm cu d distanţa cerută, cu t_1 şi, respectiv t_2, timpul necesar parcurgerii acestei distanţe la dus şi, respectiv, la întoarcere. În general, $t=d:v$; $t_1=\frac{d}{9}$; $t_2=\frac{d}{12}$. Rezultă: $\frac{d}{9}-\frac{d}{12}=2 \Rightarrow \frac{4d-3d}{36}=2 \Rightarrow d=2\cdot36=72$ (km).

542. Rezolvarea 1

Deoarece viteza din prima jumătate a distanţei este de 3 ori mai mică decît viteza din a doua jumătate, rezultă că timpul necesar din prima etapă este de 3 ori mai mare decît timpul necesar din etapa a doua, distanţele fiind egale, adică $v_1 \cdot t_1=v_2 \cdot t_2$. Ca urmare, timpul de 28 de minute poate fi organizat în 4 părţi, fiecare parte fiind egală cu timpul necesar în etapa a doua. Grafic, această relaţie se poate reprezenta astfel:



În cît timp parcurge biciclistul a doua jumătate a distanţei? $28:4=7$ (minute).

Rezolvarea 2

Din enunţ rezultă că $d=v_1 \cdot t_1=v_2 \cdot t_2$, iar $t_1+t_2=28$ minute. Dacă $v_2=3v_1$, rezultă că $t_1=3t_2$, deoarece la distanţe egale, timpul necesar este invers proporţional cu viteza (dacă viteza creşte, timpul necesar se micşorează de acelaşi număr de ori şi invers). Atunci $3t_2+t_2=28$ (minute) $\Rightarrow t_2=28:4=7$ (minute).

Rezolvarea 3

Dacă $v_2=3v_1$, rezultă că $t_1=3t_2$. Presupunem că $t_2=1$ minut, atunci t_1 ar fi $3\times1=3$ minute, în total ar fi 4 minute. De cîte ori mai puţin decît 28 minute? $28:4=7$ ori. Atunci $t_2=7\times1=7$ minute (iar $t_1=7\times3=21$ minute).

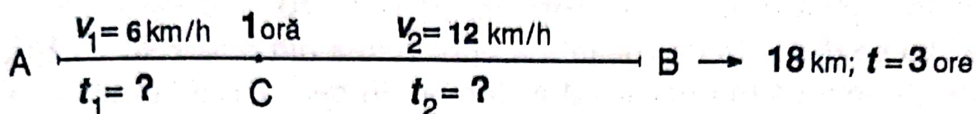
Rezolvarea 4

Dacă $t_2=\frac{d}{v_2}$, iar $t_1=\frac{d}{v_1}$, rezultă

$$\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}=28 \rightarrow \frac{d}{v_1}+\frac{d}{3v_1}=28 \rightarrow \frac{3d+d}{3v_1}=28 \rightarrow \frac{4d}{3v_1}=28. \text{ Atunci } \frac{d}{v_1}=28\cdot\frac{3}{4}=21;$$

dar $\frac{d}{v_1}=t_1$, deci $t_1=21$ minute, iar $t_2=28-21=7$ (minute).

543. Pe scurt și reprezentarea grafică:



Rezolvarea 1

1) În cît timp și-a propus Dan să ajungă la tren? $t=d:v \Rightarrow$ $t=18:6=3$ (ore).
2) Cît timp se deplasează efectiv Dan? $3-1=2$ (ore).
3) Dacă ar fi mers permanent cu **6** km pe oră, ce distanță ar fi parcurs în cele **2** ore? $2\times 6=12$ (km).
4) Ce distanță ar fi rămas neparcursă? $18-12=6$ (km). Totuși această distanță este parcursă? Cum este posibil? Deoarece trăsura are o viteză dublă, timpul va fi de **2** ori mai mic decît timpul necesar lui Dan pentru a parcurge restul distanței.
5) Cu cît este mai mare viteza trăsurii față de viteza de deplasare a lui Dan? $2\times 6-6=6$ (km/h). Deci într-o oră, trăsura parcurge în plus **6** km.
6) În cît timp recuperează cei **6** km care ar fi rămas neparcurși? $6:6=1$ (oră). Deci Dan merge cu trăsura timp de o oră și ajunge la tren.
7) La ce distanță de gară se oprise Dan? $1\times(2\times 6)=12$ (km).

Rezolvarea 2

Dacă după oprire, Dan ar fi mers tot cu **6** km pe oră, după $18:6-1=2$ ore ar fi rămas neparcursă distanța de **6** km, căci $18-2\times 6=6$.
Dacă trăsura are viteza de $2\times 6=12$ km/oră, înseamnă că ea recuperează $12-6=6$ km într-o oră, timpul total fiind de **2** ore.
Deci la **12** km distanță de gară, Dan s-a oprit și a așteptat trăsura.

544. Rezolvarea 1

1) Cîte ore ar fi trebuit să meargă motociclistul? $18-9=9$ (ore).
2) Care a fost prima viteză? $180:9=20$ (km/oră).
3) Cîte ore se deplasează motociclistul? $9-2=7$ (ore).
4) Care a fost viteza a doua? $20+10=30$ (km/h).

De aici avem două variante:

a) Presupunem că motociclistul ar fi mers în cele **7** ore numai cu prima viteză.
   5) Ce distanță ar fi parcurs? $7\times 20=140$ (km).

6) Ce distanță ar fi rămas neparcursă? $180 - 140 = 40$ (km). Înlocuim cîte o oră în care am considerat că viteza a fost de 20 km/h cu cîte o oră cu viteza de 30 km.

7) Care este diferența de viteze (Cu cît se micșorează diferența de 40 km la o singură înlocuire)? $30 - 20 = 10$ (km).

8) Cîte ore a mers motociclistul cu viteza a doua (Cîte înlocuiri vom face pînă dispare diferența de 40 km)? $40 : 10 = 4$ (ore).

9) La ce distanță de Galați s-a oprit prima dată? $4 \times 30 = 120$ km.

b) Presupunem că motociclistul ar fi mers în cele 7 ore numai cu a doua viteză.

Rezolvarea în exercițiu poate fi:

$\{18 - 9 - 2 \times 1 - [7 \times (20 + 10) - 180] : 10\} \times (20 \times 10) =$

$[7 - (7 \times 30 - 180) : 10] \times 30 = (7 - 30 : 10) \times 30 = 120$ (km).

545. Rezolvarea 1

a) Presupunem că tot timpul motociclistul ar fi mers cu viteza propusă, adică 200 m/minut.

1) Cît timp ar fi mers cu această viteză? $72\,000 : 200 - 60 = 300$ (minute).

2) Ce distanță ar fi rămas neparcursă? $72\,000 - 300 \times 200 = 12\,000$ (m).

3) Cîte minute a mers cu viteză mărită? $12\,000 : (600 - 200) = 30$ (minute).

4) Ce distanță a parcurs în 30 minute? $30 \times 600 = 18\,000$ (m). La ce distanță de punctul de pornire s-a oprit? $72\,000 - 18\,000 = 54\,000$ (m) sau (după punctul 3): Cîte minute a mers cu viteza de 200 m/minut? $6 \times 60 - 60 - 30 = 270$ (minute). Ce distanță parcurge în 270 minute? $270 \times 200 = 54\,000$ m $= 54$ km.

b) În altă variantă: Presupunem că motociclistul ar fi mers cele 300 minute (adică cele $72\,000 : 200 - 60 = 300$ minute), cu viteza mărită, deci $3 \times 200 = 600$ m/minut.

1) Ce distanță ar fi parcurs? $600 \times 300 = 180\,000$ (m).

2) Cu cîți metri ar fi parcurs în plus? $180\,000 - 72\,000 = 108\,000$ (m).

3) Care a fost diferența de viteze (cu cîți metri ar fi mers mai mult într-un minut în această variantă)? $600 - 200 = 400$ (m/minut).

4) Cîte minute a mers cu viteza de 200 m pe minut (După cît timp de la plecare s-a oprit motociclistul)? $108\,000 : 400 = 270$ (minute).

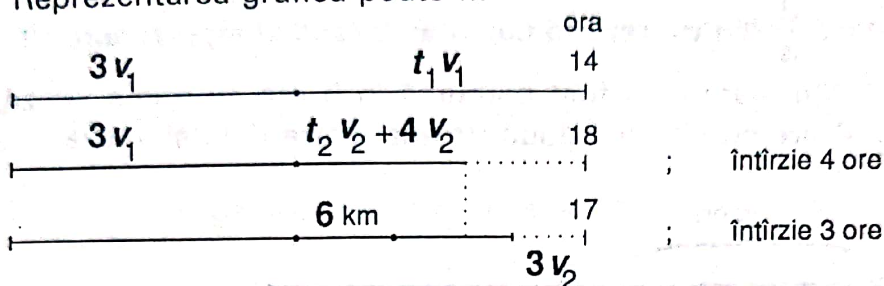
5) La ce distanță de punctul de plecare s-a oprit pentru reparații? $270 \times 200 = 54\,000$ (m) $= 54$ km.

Rezolvarea 2

Dacă după oprire, motociclistul ar fi mers tot cu 200 m/min, adică cu 12 km/h, după cele 5 ore de mers (căci $72 : 12 - 1 = 5$), ar fi rămas neparcurși 12 km. Dacă după reparație motocicleta are o viteză triplă, înseamnă că într-o oră ea străbate mai mult decît în prima etapă cu $3 \times 12 - 12 =$

$= 24$ km. Ca să ajungă tot în timpul de **5** ore, înseamnă că el a mers cu viteza a doua o distanță în care a recuperat și cei **12** km.
Dacă într-o oră motociclistul recuperează **24** km, înseamnă că **12** km îi recuperează în jumătate de oră, căci $24 : 2 = 12$.
Deci motocicleta s-a defectat la o distanță pe care a parcurs-o apoi în jumătate de oră cu viteza de $3 \times 12 = 36$ km pe oră, adică la $36 : 2 = 18$ km de punctul de sosire, deci la $72 - 18 = 54$ km de punctul de plecare.

546. Reprezentarea grafică poate fi:

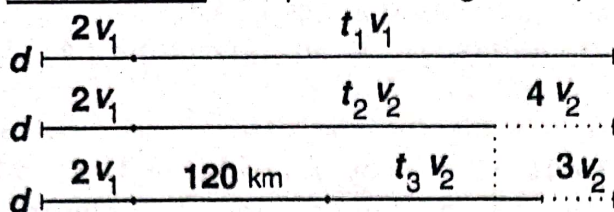


Notăm cu t_1 și v_1 timpul și, respectiv, viteza bicicletei, cu t_2 și v_2 timpul și, respectiv, viteza deplasării pe jos.
Dacă v_2 este de **3** ori mai mică decît v_1, rezultă că, pentru aceeași distanță, t_2 este de **3** ori mai mare decît t_1, adică distanța ce ar fi fost parcursă cu bicicleta într-o oră este parcursă pe jos în **3** ore.
Cu cîte ore mai mult? $3 - 1 = 2$ (ore).
Dacă la fiecare oră cu v_1, întîrzierea este de **2** ore, atunci de la cîte ore cu v_1 se produce o întîrziere de **4** ore dacă se deplasează pe jos? $4 : 2 = 2$ (ore).
Deci, dacă distanța după oprire ar fi străbătută cu v_1 în **2** ore, pentru toată distanța ar fi fost necesare **5** ore, căci $3 + 2 = 5$.
În ultima situație, întîrzierea este de **3** ore, căci $17 - 14 = 3$. Dacă pentru distanța care ar fi fost parcursă cu v_1 într-o oră sînt necesare **3** ore cu v_2, deci mai mult cu **2** ore, de la cîte ore cu v_1 se acumulează o întîrziere de **3** ore dacă se deplasează cu v_2? $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$ (ore).
Rezultă că timpul necesar parcurgerii distanței:
a) era dorit a fi **5** ore, căci $3 + 2 = 5$;
b) a fost de **9** ore, căci $3 + 2 + 4 = 9$;
c) putea fi de **8** ore, căci $9 - 1 = 8$.

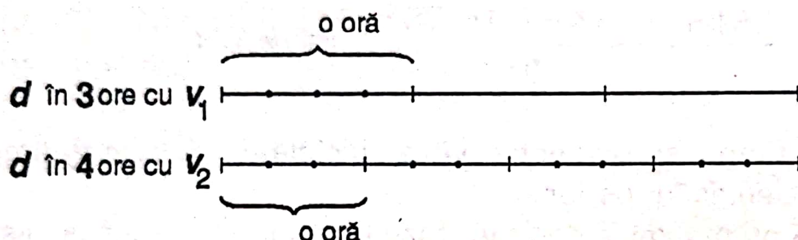
În ultima situație se observă că 3 ore $+ 6 : v_1 + 1\frac{1}{2}$ ore $+ 3$ ore $= 8$ ore $\Rightarrow$

$7\frac{1}{2} + 6 : v_1 = 8 \Rightarrow 6 : v_1 = \frac{1}{2}$ oră $\Rightarrow v_1 = 6 \times 2 = 12$ (km/h); timpul de plecare a fost ora **9**, căci $14 - 5 = 9$; $v_2 = 12 : 3 = 4$ (km/h); distanța dintre cele două localități a fost de **60** km, căci $12 \times 5 = 60$.

547. <u>Rezolvarea 1</u> O reprezentare grafică poate fi:



Dacă v_2 este cît $\frac{3}{4}$ din v_1, rezultă că, la aceeași distanță, t_1 este cît $\frac{3}{4}$ din t_2, adică distanța, care ar fi fost parcursă în 3 ore cu prima viteză, este străbătută în 4 ore cu viteza a doua (relația dintre timp și viteză), adică:



Dacă la fiecare 3 ore întîrzierea este de o oră $(4-3=1)$, atunci la cîte grupe de 3 ore cu v_1 se produce o întîrziere de 4 ore dacă se deplasează cu v_2? adică $1 \times ? = 4$; $4 : 1 = 4$ (grupe). În cîte ore ar străbate distanța după oprire cu v_1? $4 \times 3 = 12$ (ore). În ultima situație întîrzierea este de 3 ore. Dacă pentru distanța care ar fi fost parcursă cu prima viteză în 3 ore sînt necesare 4 ore cu viteza a doua (mai mult cu o oră), de la cîte grupe de 3 ore cu v_1 se acumulează o întîrziere de 3 ore? De la 3 grupe de cîte 3 ore, adică de la 9 ore. Rezultă că timpul necesar parcurgerii distanței:
a) era planificat a fi 14 ore, căci $2+12=14$;
b) a fost de 18 ore, căci $2+12+4=18$;
c) putea fi de 17 ore, căci $18-1=17$.
În ultima situație se observă că: $2+120 : v_1+9+3=17$, adică $120 : v_1=3 \Rightarrow v_1=40$ km/h; $v_2=\frac{3}{4}\cdot 40 \Rightarrow v_2=30$ km/h; $d=14\cdot 40=560$ km sau $d=2\times 40+16\times 30=560$ km sau $d=2\times 40+120+(9+3)\cdot 30=$ $=560$ km/h.

<u>Rezolvarea 2</u>

În prima situație, după oprire, mergînd cu v_1, ar fi fost nevoie de 12 ore. În ultima situație, după cei 120 km, dacă ar fi mers pînă la punctul de sosire cu v_1, în loc de 12 ore, ar fi fost necesare 9 ore, căci $v_2=\frac{3}{4}$ din v_1, de unde $t_1=\frac{3}{4}$ din t_2. Rezultă că $12v_1=9v_1+120$ km $\Leftrightarrow$ 120 km $=3v_1 \Rightarrow$

$v_1 = 120 : 3 \Rightarrow v_1 = 40$ km/h; $v_2 = \frac{3}{4} \cdot 40 \Leftrightarrow v_2 = 30$ km/h; $d = 40 \times 16 =$

$= 560$ km.

Rezolvarea 3

Dacă într-o oră străbate cît $\frac{3}{4}$ din distanța pe care ar parcurge-o cu viteza inițială într-o oră, atunci în 4 ore străbate cît ar merge cu prima viteză în $\frac{12}{4}$ ore, căci $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ ore. Dar distanța parcursă în 3 ore? $3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ (ore).

Într-o oră rămîne în urmă cu distanța pe care ar parcurge-o în $\frac{1}{4}$ oră, căci $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, iar pentru toată distanța de după oprire întîrzie cu $\frac{12}{4}$ ore (cu 3 ore); în ultima situație întîrzie cu $\frac{9}{4}$ ore.

În cîte ore ar străbate distanța de după oprire cu prima viteză? (De la cîte ore se acumulează o întîrziere de $\frac{12}{4}$ ore?). Dacă de la o oră se acumulează o diferență de $\frac{1}{4}$ oră, întîrzierea de $\frac{12}{4}$ ore se acumulează la 12 ore, căci $\frac{12}{4} : \frac{1}{4} = 12$ (ore).

Dar cînd întîrzie cu $\frac{9}{4}$ ore? De la 9 ore, căci $\frac{9}{4} : \frac{1}{4} = 9$. Deci: distanța

a) este planificată a fi parcursă în $12 + 2 = 14$ ore;

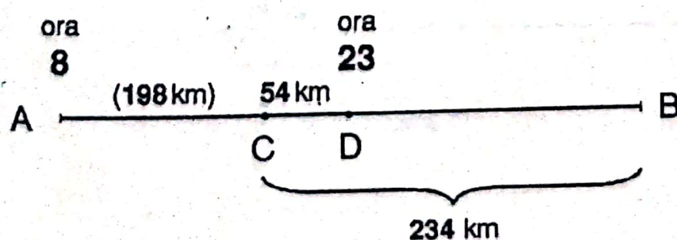
b) este parcursă în $2 + 12 + 4 = 18$ ore;

c) ar putea fi parcursă în $2 + 120 : v_1 + 9 + 3 = 15 + 120 : v_1$.

Din compararea ultimelor două egalități, rezultă că $18 = 15 + 120 : v_1$, adică $v_1 = 120 : 3 \Rightarrow v_1 = 40$ km/h; $v_2 = 40 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow v_2 = 30$ km/h; distanța este de 560 km, căci $40 \cdot 14 = 560$.

548. Pentru a afla distanța AC, trebuie să determinăm viteza navei și timpul în care este parcursă această distanță.

Reprezentarea grafică poate fi:



1) Care este distanța DB? **234 − 54 = 108** (km).

2) În cît timp parcurge nava distanța DB? De la orele **23** la orele **9** sînt **10** ore <u>sau</u>: Dacă distanța AB este parcursă în **24** ore (de la ora **9** la ora **9** a doua zi), iar distanța AD este parcursă pînă la orele 23, adică în 14 ore, înseamnă că distanța DB este parcursă în **24 − 14 = 10** ore.

3) Care este viteza navei? **180 : 10 = 18** (km/h).

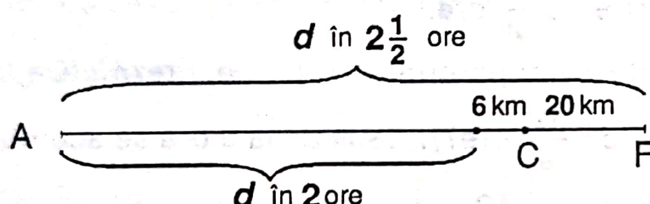
4) În cît timp parcurge distanța de **234** km, adică distanța CB? **234 : 18 = 13** (ore).

5) În cît timp parcurge distanța AC? **24 − 13 = 11** (ore).

6) Care este distanța AC? **11 × 18 = 198** (km).

549. <u>Rezolvarea 1</u>

Notăm cu C punctul în care se află casa automobilistului (adică orașul Suceava), cu F punctul în care se află satul unde locuiește fratele, cu ***v*** viteza. O reprezentare grafică poate fi:

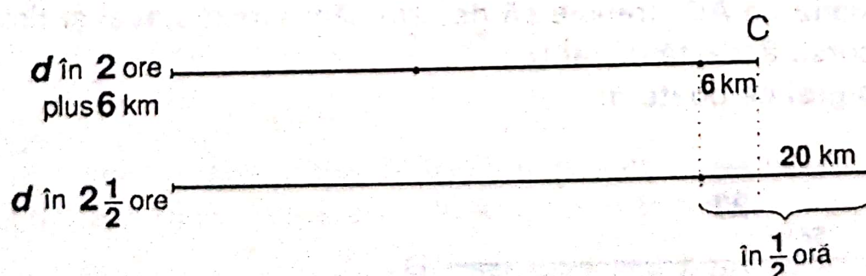


Se observă că în $2\frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ oră automobilistul parcurge distanța de $6 + 20 = 26$ km. Dacă în jumătate de oră parcurge **26** km, într-o oră parcurge $2 \times 26 = 52$ km. Deci viteza medie este de **52** km/h. La ce distanță de orașul Suceava se află orașul Vatra Dornei? $2 \times 52 + 6 = 104 + 6 = 110$ km sau $2\frac{1}{2} \times 52 - 20 = 104 + 26 - 20 = 110$ km. <u>Pe scurt</u>:

$2\frac{1}{2}v - 2v = 26 \Rightarrow \frac{1}{2}v = 26 \Rightarrow v = 26 \cdot 2 = 52$ km/h; $d = 2 \cdot 52 + 6 \Rightarrow d = 110$ km.

<u>Rezolvarea 2</u>

Putem reprezenta grafic distanța (*d*) ce poate fi parcursă astfel:



Din desen rezultă că în $\frac{1}{2}$ oră automobilistul parcurge $20+6=26$ km, iar într-o oră $2\times26=52$ km.

Distanța pînă acasă este 110 km, căci $2\times52+6=110$ km sau $2\frac{1}{2}\times52-$ $-20=110$ km.

Rezolvarea 3

Din enunț rezultă că diferența dintre cele două parcursuri (în $2\frac{1}{2}$ ore și, respectiv, în 2 ore) este de 26 km, căci $20+6=26$ km.

Presupunem că viteza automobilistului a fost de 16 km/h. Atunci, distanța ($d=v\cdot t$) parcursă ar fi fost $d_1=2\cdot16=32$ km, iar în situația a doua $d_2=$ $=2\frac{1}{2}\cdot16=40$ km; care ar fi fost diferența dintre cele două parcursuri (cele două distanțe)? $40-32=8$ km. De cîte ori este mai mică această diferență decît 26 km? $26:8=3\frac{2}{8}$ (ori) $=3\frac{1}{4}$ (ori). Rezultă că viteza de 16 km din ipoteza noastră trebuie mărită de $3\frac{1}{4}$ ori pentru ca diferența dintre distanțele parcurse să fie de 26 km.

Care a fost viteza automobilistului? $3\frac{1}{4}\cdot16=52$ km/h.

Care este distanța dintre Suceava și Vatra Dornei? $2\times52+6=110$ km sau $2\frac{1}{2}\times52-20=110$ km.

Rezolvarea 4

Notăm cu d distanța dintre cele două orașe, cu d_1 și d_2 distanța parcursă în 2 ore și, respectiv, în 2 ore și jumătate.

Deoarece viteza este constantă, înseamnă că d_1 este mai mică decît d_2 de atîtea ori de cîte ori 2 este mai mic decît $2\frac{1}{2}$, adică $2:\frac{5}{2}=\frac{4}{5}$ ori.

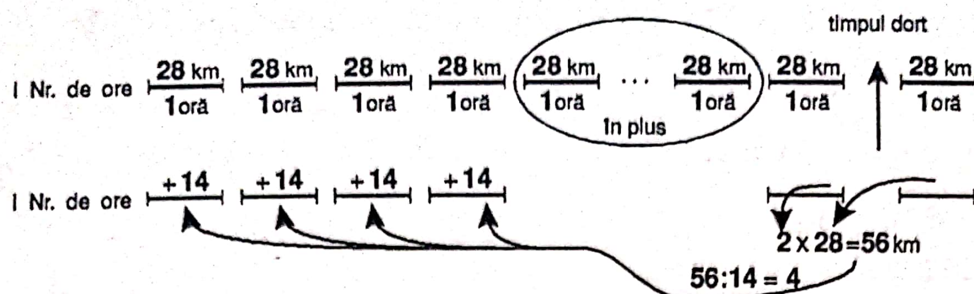
Deci $d_1=\frac{4}{5}d_2$. Dar $d_2-d_1=20+6=26$ km.

Rezultă $d_2-\frac{4}{5}d_2=26$ km, adică $\frac{1}{5}d_2=26$ km $\Rightarrow d_2=26\cdot5\Rightarrow d_2=130$ km;

$d=130-20=110$ km.

550. Rezolvarea 1

O reprezentare grafică poate fi:



Cu cîți km parcurge mai mult într-o oră în a doua variantă (față de prima variantă)? **42 − 28 = 14** (km). Care este diferența de timp între cele două variante? **1 + 1 = 2** (ore). În cîte ore parcurge distanța cu mașina?
În atîtea ore de cîte ori **14** se cuprinde în **2 × 28**, adică în **56 : 14 = 4** ore.
Care este distanța dintre Sibiu și Cluj-Napoca? **4 × 42 = 168** (km) sau **(4 + 2) × 28 = 168** (km).

Rezolvarea 2

Din enunț rezultă că diferența de timp dintre cele două situații este de **2** ore, căci **1 + 1 = 2**. Presupunem că distanța dintre cele două orașe este de **84** km (un multiplu al vitezelor **28** km/h și, respectiv, **42** km/h). În prima situație, care ar fi fost timpul necesar parcurgerii distanței? **84 : 28 = 3** (ore). Dar în a doua situație? **84 : 42 = 2** (ore). Care ar fi fost diferența de timp dintre cele două situații? **3 − 2 = 1** (oră). Dacă la o distanță de **84** km, diferența de timp este de **1** oră, pentru ca această diferență să fie de **2** ore, rezultă că distanța a fost de **2 × 84 = 168** (km).

Rezolvarea 3

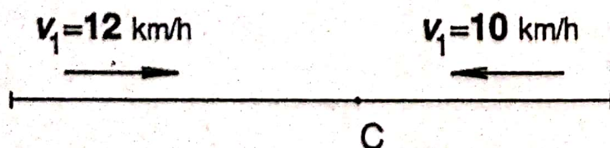
Notăm cu d distanța cerută, cu t timpul în care Sorin dorea să parcurgă această distanță. Se știe că $d : v = t$. Prima parte a enunțului poate fi scrisă astfel: $t = d : 28 - 1$. Din a doua parte, rezultă: $t = d : 42 + 1$. Atunci

$$d : 28 - 1 = d : 42 + 1 \Rightarrow d : 28 = d : 42 + 2 \Rightarrow \frac{d}{28} - \frac{d}{42} = 2 \rightarrow \frac{3d - 2d}{84} = 2 \Rightarrow$$

$d = 2 \times 84 \Rightarrow d = 168$ (km).

551. La numărul **16 961** se adaugă alt număr, deci numărul obținut este mai mare. Cu cît? Cu cel puțin **40** (în mod obișnuit, viteza medie a unei mașini este mai mare de **20** km/h). Numărul obținut este de forma $\overline{17a71}$. Dacă a este **0**, viteza va fi: **(17 071 − 16 961) : 2 = 110 : 2 = 55** (km/h). Dacă a este **1**, viteza ar fi fost mare, căci **210 : 2 = 105** (km/h).

552. Rezolvarea 1 Reprezentarea grafică poate fi:



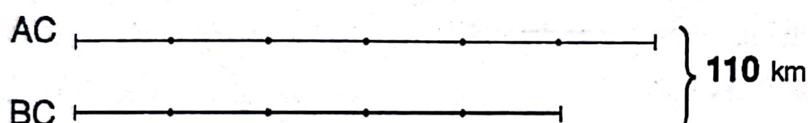
Într-o oră, cei doi biciclişti parcurg la un loc 22 km, căci $10+12=22$. Deci distanţa dintre ei se micşorează în fiecare oră cu cîte 22 km. După cîte ore se întîlnesc? $110 : 22=5$ (ore). În exerciţiu: $110 : (12+10)=110 : 22=$ $=5$ (ore).

Rezolvarea 2. Generalizare

Notînd cu d distanţa dintre punctele de plecare, cu v_1 şi v_2 cele două viteze, atunci timpul t după care se întîlnesc este: $t=d : (v_1+v_2)$; în cazul dat: $t=110 : (12+10)=5$ (ore).

Rezolvarea 3

Fie C punctul de întîlnire a celor doi biciclişti. Se observă că primul biciclist parcurge AC, în timpul în care celălalt biciclist parcurge BC. Deoarece timpul este acelaşi, raportul dintre distanţe este acelaşi cu raportul dintre viteze, adică $12 : 10=6 : 5$, adică BC este cît $\frac{5}{6}$ din AC. Deoarece $AB+BC=$ $=110$, iar $BC=\frac{5}{6}$ AC, putem privi problema ca una simplă de sumă şi raport, în care reprezentarea grafică poate fi:



Rezultă că 11 părţi, fiecare egală cu a şasea parte din AC sau cu a cincea parte din BC, reprezintă 110 km. Atunci $AC=110 : 11\times6=60$ (km), iar $CB=110 : 11\times5=50$ (km). În cît timp se întîlnesc cei doi biciclişti? Deoarece $t=d : v$, rezultă $t=60 : 12=5$ (ore) sau $t=50 : 10=5$ (ore).

Rezolvarea 4

Dacă notăm cu t numărul de ore după care s-au întîlnit cei doi biciclişti, atunci avem: $12t+10t=110 \Leftrightarrow 22t=110 \Rightarrow t=110 : 22 \Rightarrow t=5$ (ore).

553.



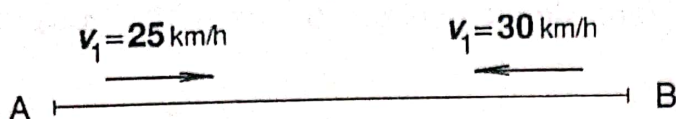
Rezolvarea 1

După cîte ore se întîlnesc cele două trenuri? 14 ore − 10 ore = 4 ore.
Cîţi km parcurg cele două trenuri într-o oră? 60 km + 55 km = 115 km.
Cîţi km parcurg cele două trenuri în 4 ore? 4×115 km = 460 km.

Rezolvarea 2

După cîte ore se întîlnesc cele două trenuri? 14 ore − 10 ore = 4 ore.
Cîţi km parcurge primul tren în 4 ore? 4×60 km = 240 km.
Cîţi km parcurge al doilea tren în 4 ore? 4×55 km = 220 km.
Care este distanţa dintre cele două gări? $240+220=460$ (km).

554. Rezolvarea 1

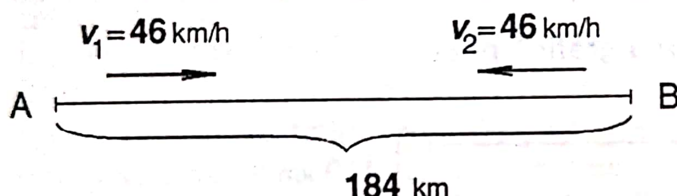


Cîți km a parcurs primul vapor în 3 ore? $3 \times 25 = 75$ (km).
Cîți km a parcurs al doilea vapor în 3 ore? $3 \times 30 = 90$ (km).
Cîți km au parcurs împreună cele două vapoare? $75 + 90 = 165$ (km).
Ce distanță a rămas de parcurs după 3 ore? $200 - 165 = 35$ (km).

Rezolvarea 2

Cîți km parcurg cele două vapoare într-o oră? $25 + 30 = 55$ (km).
Cîți km parcurg cele două vapoare în 3 ore? $3 \times 55 = 165$ (km).
Ce distanță este între cele două vapoare după 3 ore de mers?
$200 - 165 = 35$ (km).

555.



Rezolvarea 1

Cîți km parcurg cei doi într-o oră? $2 \times 46 = 92$ (km). În fiecare oră, distanța dintre ei se micșorează cu 92 km. După cîte ore, cei doi automobiliști se întîlnesc? $184 : 92 = 2$ (ore).

Rezolvarea 2

Deoarece cei doi automobiliști merg cu aceeași viteză și au pornit în același timp, întîlnirea se va produce la jumătatea distanței dintre cele două orașe, adică la $184 : 2 = 92$ km. În cîte ore parcurge fiecare dintre cei doi automobiliști distanța de 92 km? $92 : 46 = 2$ (ore).

556. Rezolvarea 1

Dacă automobilele se întîlnesc la jumătatea distanței, înseamnă că automobilul care a plecat din B parcurge mai mult cu 50 km decît cel care a plecat din A (cu o oră mai tîrziu). Practic al doilea automobilist, pînă la întîlnire, recuperează 50 km. În cît timp? Dacă într-o oră recuperează $60 - 50 = 10$ km, în cîte ore recuperează 50 km? $50 : 10 = 5$. Ce distanță este între A și B? $50 + 5 \times 50 + 5 \times 60 = 600$ (km).

Rezolvarea 2

Notăm cu t timpul în care automobilul care pleacă din A parcurge jumătate din distanță și cu $t-1$ timpul necesar celui de-al doilea. Rezultă $t \times 50 = (t-1) \times 60 \Rightarrow 50t = 60t - 60 \Rightarrow 10t = 60 \Rightarrow t = 6$. Atunci distanța dintre cele două localități este: $6 \times 50 + 5 \times 60 = 600$ (km).

557. Rezolvarea 1

Dacă în **2** ore primul biciclist parcurge o distanță pe care al doilea o parcurge în **4** ore, rezultă că distanța parcursă de primul biciclist într-o singură oră este parcursă de al doilea în **2** ore, căci **4 : 2 = 2**. Timpul fiind același, de **6** ore, rezultă că distanța parcursă de primul pînă la întîlnire este de **2** ori mai mare decît cea parcursă de al doilea biciclist. Rezultă că **4** părți, fiecare egală cu distanța parcursă de al doilea biciclist pînă la întîlnire, reprezintă **108** km. Cîți km a parcurs primul biciclist pînă la întîlnire? **108 : 3 = = 36** (km). Dar al doilea? **36 × 2 = 72** (km). Care a fost viteza primului biciclist? **72 : 6 = 12** (km/h). Dar viteza celui de-al doilea? **36 : 6 = 6** (km/h) sau **12 : 2 = 6** (km/h).

Rezolvarea 2

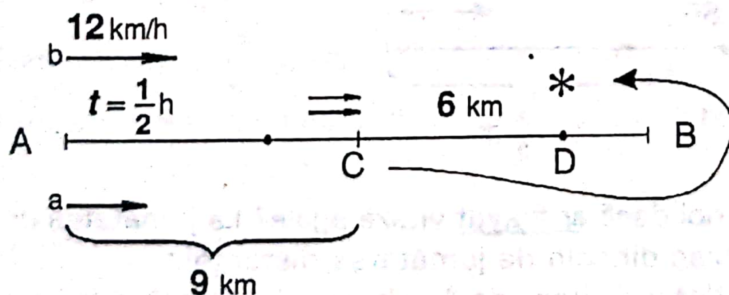
Dacă cei doi bicicliști se deplasează unul spre celălalt, înseamnă că în fiecare oră distanța dintre ei se micșorează cu suma vitezelor. Ei se întîlnesc după **6** ore. Notînd v_1 și v_2 viteza fiecăruia, putem scrie: $6 \cdot (v_1 + v_2) = 108 \Rightarrow v_1 + v_2 = 18$ km/h. Primul parcurge în **2** ore cît al doilea în **4** ore, adică $2v_1 = 4v_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2$. Rezultă $2v_2 + v_2 = 18 \Rightarrow v_2 = 18 : 3 = 6$ km/h; $v_1 = 12$ km/h.

Rezolvarea 3

Notăm cu d distanța parcursă de primul în **2** ore sau de al doilea în **4** ore. Atunci $v_1 = d : 2$, iar $v_2 = d : 4$. Rezultă: $6 \cdot \frac{d}{2} + 6 \cdot \frac{d}{4} = 108 \Rightarrow 12d + 6d = 432 \Rightarrow d = 24$ km. Deci: $v_1 = 24 : 2 = 12$ (km/h); $v_2 = 24 : 4 = 6$ (km/h).

558. În cît timp parcurge a doua mașină distanța dintre A și B? **280 : 56 = = 5** (ore). Cîți km parcurge prima mașină în **5** ore? **5 × 24 = 120** (km). Cîți km mai are de parcurs prima mașină pînă în B? **280 − 120 = 160** (km). Cîți km parcurg cele două mașini într-o oră? **24 + 56 = 80** (km). În cîte ore se întîlnesc de la plecarea mașinii a doua din B? **160 : 80 = 2** (ore). După cîte ore de la plecarea ambelor mașini din A se întîlnesc? **5 + 2 = 7** (ore).

559. Scrierea pe scurt a enunțului poate duce la următoarea reprezentare grafică:



1) Ce distanță parcurge biciclistul singur (într-o jumătate de oră)? **12 : 2 = 6** (km).
2) Ce distanță mai parcurge pînă este ajuns de automobil? **9 − 6 = 3** (km).
3) În cît timp parcurge biciclistul distanța de **3** km? Dacă într-o oră parcurge **12** km, atunci **3** km îi parcurge într-un sfert de oră, căci **3 : 12 =**

$=\frac{1}{4}$ (h). Într-un sfert de oră, automobilul a parcurs **9** km (ajunge pe biciclist).

4) Care este viteza automobilului (Cîți km parcurge în **4** sferturi de oră)? $4 \times 9 = 36$ (km/h).

5) În cît timp parcurge biciclistul cei **6** km? Dacă într-o oră parcurge **12** km, cei **6** km îi parcurge în jumătate de oră, căci **6** este jumătatea lui **12** (sau $t = d : v \Rightarrow t = 6 : 12 = \frac{1}{2}$ h). În acest timp, $\frac{1}{2}$ h, automobilul a ajuns în B, unde a stat un sfert de oră și apoi a parcurs drumul înapoi, pînă la întîlnirea cu biciclistul.

6) Cît timp este în mișcare automobilul după ce l-a ajuns pe biciclist? $\frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h = \frac{1}{4}h$.

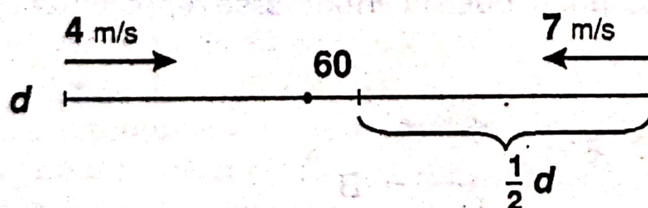
7) Ce distanță parcurge automobilul în $\frac{1}{4}$h? $36 : 4 = 9$ (km) sau $d = v \times t \Rightarrow d = 36 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow d = 9$ km. Deci distanța de la punctul în care automobilul a ajuns pe biciclist pînă la punctul de întîlnire, prin B, este de **9** km, adică $CD + 2DB = 9$ km.

8) Care este distanța de la punctul de întîlnire pînă în B? $(9-6) : 2 = 1\frac{1}{2}$ (km).

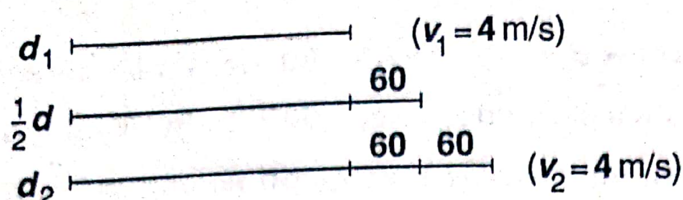
9) Care este distanța dintre A și B? $9+6+1\frac{1}{2}=16\frac{1}{2}$ (km).

560. Rezolvarea 1

Reprezentarea grafică poate fi:



Unde s-ar fi întîlnit cei doi dacă ar fi avut viteze egale? La jumătatea drumului.
Din ce cauză se întîlnesc dincolo de jumătatea distanței?
Din cauză că primul atlet are viteza de **4** m/s, iar al doilea **7** m/s, deci într-o secundă al doilea parcurge mai mult cu $7-4=3$ m/s (diferența de viteze).
În tot traseul, cu cîți m parcurge mai mult al doilea atlet față de primul?
Cu dublul lui **60**, adică cu $2 \times 60 = 120$ m, deoarece primul atlet parcurge cu **60** m mai puțin decît jumătatea distanței pe care au parcurs-o împreună, adică:



În cîte secunde al doilea atlet parcurge mai mult cu 120 m față de primul atlet? Dacă într-o secundă el parcurge cu 3 m mai mult față de primul atlet, distanța de 120 m este parcursă în plus în 40 secunde, căci $120 : 3 = 40$. Ce distanță parcurge primul atlet? $40 \times 4 = 160$ (m). Dar al doilea? $40 \times 7 = 280$ (m). Sau, pe scurt: Notăm cu t timpul necesar parcurgerii distanței de către cei doi atleți. Atunci $7t - 4t = 2 \cdot 60 \Rightarrow 3t = 120 \Rightarrow t = 120 : 3 = 40$ (s); $d_1 = 40 \cdot 4 = 160$ (m); $d_2 = 40 \cdot 7 = 280$ (m).

Rezolvarea 2

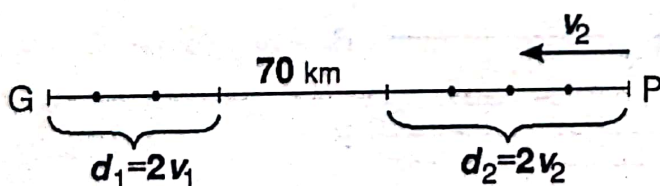
Păstrăm notațiile de mai sus. Deoarece timpul este același, rezultă că distanțele sînt diferite datorită diferenței de viteze.

De cîte ori este mai mică prima viteză față de a doua? $4:7=\frac{4}{7}$. Rezultă că

$d_1 = \frac{4}{7}d_2$. Dacă $d_2 - d_1 = 2 \times 60$ m, atunci $d_2 - \frac{4}{7}d_2 = 120$ m $\Rightarrow$

$\frac{3}{7}d_2 = 120$ m $\Rightarrow d_2 = 120 : 3 \times 7 \Leftrightarrow d_2 = 280$ m; $d_1 = \frac{4}{7} \cdot 280$ m $\Rightarrow d_1 = 160$ m.

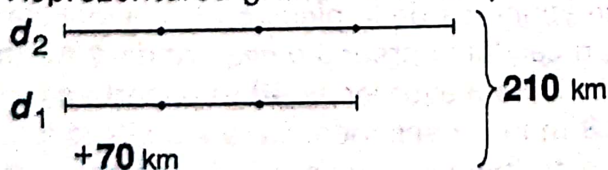
561. Rezolvarea 1 Reprezentarea grafică poate fi:



Cum se ajunge la această reprezentare?

Deoarece $v_1 = \frac{3}{4}v_2$, rezultă că d_1 este cît $\frac{3}{4}$ din d_2, timpul fiind același.

Reprezentarea grafică a distanțelor parcurse poate fi așezată astfel:



Din desen rezultă că 7 părți, fiecare parte fiind egală cu $\frac{1}{4}$ din d_2 reprezintă $210 - 70 = 140$ km. Cîți km a parcurs primul în 2 ore? $140 : 7 \times 3 = 20 \times 3 = 60$ km. Cîți km a parcurs cel de-al doilea în 2 ore? $140 : 7 \times 4 = 20 \times 4 =$

$=80$ km sau $\frac{3}{4} \cdot d_2=60$ km $\Rightarrow d_2=60 : 3\times 40=80$ km. Care a fost viteza medie a motociclistului care a plecat din Galați? $60 : 2=30$ (km/h). Care a fost viteza medie a celuilalt motociclist? $80 : 2=40$ (km/h) sau $\frac{3}{4} \cdot v_2=$ $=30 \Rightarrow v_2=30 : 3\times 4=40$ (km/h).

Rezolvarea 2

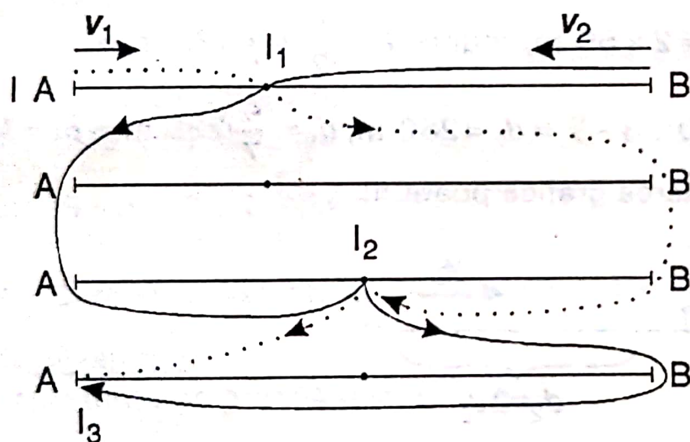
Păstrăm notațiile de mai sus. Dacă $d_1=2v_1$, $d_2=2v_2$, iar $v_1=\frac{3}{4}v_2$, rezultă

$2v_1+2v_2+70$ km $=210$ km $\Rightarrow 2\frac{3}{4}v_2+2v_2=140$ km $\Rightarrow 3v_2+4v_2=$

$=2\cdot 140$ km $\Rightarrow$ $7v_2=280 \Rightarrow$ $v_2=280 : 7 \Rightarrow$ $v_2=40$ (km/h); $v_1=\frac{3}{4}\cdot 40 \Rightarrow$

$v_1=30$ (km/h).

562. Fie I_1 și I_2 punctele în care cei doi atleți se întîlnesc respectiv prima dată și a doua oară. De cîte ori este parcursă distanța AB de către cei doi atleți? Pentru a răspunde la această întrebare, apelăm la o reprezentare grafică, pe etape:



În desen se observă că pînă la întîlnirea I_1 cei doi atleți acoperă împreună o singură dată distanța AB. De la această întîlnire pînă la întîlnirea I_2 ei mai acoperă încă de 2 ori această distanță; apoi pînă la I_3 mai acoperă încă de **2** ori distanța AB. Deci de la pornire pînă la întîlnirea în A (I_3), cei doi atleți acoperă împreună de **5** ori distanța AB. În enunț se spune că de la plecare pînă la întîlnirea în A au trecut **60** s. În cît timp parcurg cei doi împreună o singură dată AB (pînă la I_1)? **60 : 5=12** (s). Dacă prima întîlnire a avut loc la **48** m depărtare de A, rezultă că primul atlet a parcurs **48** m în **12** secunde. Care era viteza lui de deplasare? **48 : 12=4** (m/s). Cîți m străbate acesta în cele **60** de secunde de la plecare? **60×4=240** (m). Însă de la plecare pînă la întîlnire, atletul care a plecat din A acoperă de **2** ori distanța AB, deci **2AB=240**, de unde **AB=240 : 2=120** (m). Dacă pînă la prima întîlnire au trecut **12** s, iar primul atlet parcurge, pînă la I_1, **48** m, rezultă că al doilea atlet a parcurs **120−48=** **=72** m tot în **12** s. Care era viteza celui de-al doilea atlet? **72 : 12=6** (m/s).

563. Rezolvarea 1

Pentru a afla vitezele, trebuie să determinăm distanţele parcurse pînă la întîlnire.

1) Cu cîţi km parcurge mai mult cel cu viteza mai mare? Dacă într-o oră parcurge mai mult cu **17** km, în **2** ore, pînă la întîlnire, va parcurge cu $2 \times 17 = 34$ km mai mult. De aici, putem privi problema ca una ce cuprinde suma şi diferenţa mărimilor. Deci:

2) Care este dublul distanţei parcurse de automobilul cu viteza mai mică? $258 - 34 = 224$ km; (sau: Care este dublul distanţei parcurse de celălalt automobilist? $258 + 34 = 292$ km).

3) Ce distanţă a parcurs fiecare? Cel cu viteză mai mică: $224 : 2 = 112$ km. Dar celălalt? $112 + 34 = 146$ (km); (sau: $292 : 2 = 146$; $146 - 34 = 112$).

4) Care este viteza fiecăruia? Cel cu viteza mai mică: $112 : 2 = 56$ (km/h); celălalt: $56 + 17 = 73$ sau $146 : 2 = 73$ (km/h). În exerciţiu: $v_1 = (258 - 2 \times 17) : 2 : 2 = 56$ (km/h); $v_2 = (258 + 2 \times 17) : 2 : 2 = 73$ (km/h).

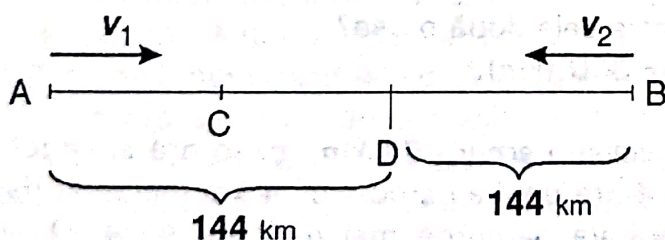
Rezolvarea 2

Notăm cu v_2 viteza mai mică, iar cu v_1 cealaltă viteză. Dacă $d = v \cdot t$, iar $v_1 = v_2 + 17$, rezultă $d = 2v_1 + 2v_2 \Rightarrow 258 = 2(v_2 + 17) + 2v_2 \Rightarrow 258 = 4v_2 + 34 \Rightarrow v_2 = (258 - 34) : 4 \Rightarrow v_2 = 56$ km/h; $v_1 = v_2 + 17 \Rightarrow v_1 = 56 + 17 \Rightarrow v_1 = 73$ km/h.

Rezolvarea 3

Notăm cu d_1 şi v_1 distanţa şi, respectiv, viteza primului autoturism în **2** ore; cu d_2 şi v_2 mărimile pentru al doilea. Se ştie că $v_1 = v_2 + 17$. Atunci $d_1 : v_1 = 2$, iar $d_2 : v_2 = 2$, adică $\frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2} = 2 \Rightarrow \frac{d_1 + d_2}{v_1 + v_2} = 2 \Rightarrow \frac{258}{v_2 + v_2 + 17} = 2 \Leftrightarrow$
$2v_2 + 17 = 258 : 2 \Rightarrow v_2 = (129 - 17) : 2 \Rightarrow v_2 = 56$ km/h; $v_1 = 56 + 17 \Leftrightarrow v_1 = 73$ km/h.

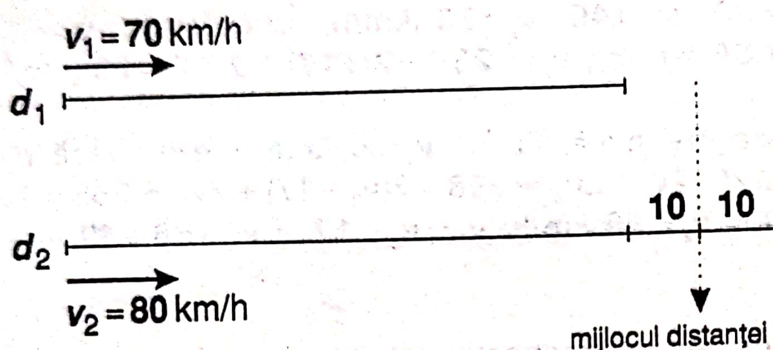
564. Scrierea pe scurt şi reprezentarea grafică a relaţiilor dintre date pot fi:



Cînd motociclistul a pornit din B, biciclistul se afla în C. În timp ce motociclistul parcurge distanţa BD, biciclistul parcurge distanţa CD. Deoarece viteza motociclistului este de **3** ori mai mare decît viteza biciclistului, timpul necesar fiind acelaşi, rezultă că distanţa CD este de **3** ori mai mică decît distanţa DB. Dar $BD = AD = 288 : 2 = 144$. Atunci $CD = 144 : 3 = 48$ km, iar $AC = 144 - 48 = 96$ km. Biciclistul parcurge distanţa de **96** km în **8** ore, deci are viteza de $96 : 8 = 12$ km/h; motociclistul are viteza de $3 \times 12 = 36$ km/h.

565. 1) Care este jumătatea drumului? 60 : 2 = 30 (km).
Jumătatea drumului este de 3 ori mai mare decît distanţa care a rămas de parcurs ciclistului (pînă la jumătate) după ce a mers 2 ore. Atunci:
2) Ce distanţă i-a rămas ciclistului (pînă la jumătate)? 30 : 3 = 10 (km).
Cîţi km a parcurs ciclistul pînă a pornit motociclistul (timp de 2 h)?
30 − 10 = 20 (km).
3) Într-o oră, cîţi km parcurge ciclistul (care este viteza sa)?
20 : 2 = 10 (km/h).
4) Care este viteza motociclistului? 10 × 3 = 30 (km/h).
5) La ce oră se întîlnesc? 10 + 2 + 1 = 13, deci la ora 13.

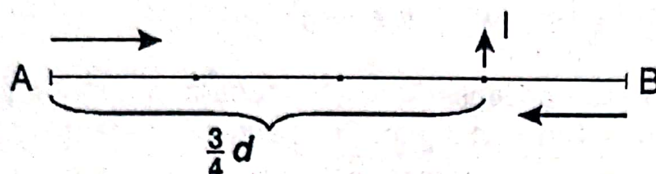
566. Asemănătoare cu problema nr. 560.
O reprezentare grafică a distanţelor parcurse poate fi:



1) Cu cîţi km a parcurs mai mult maşina cu viteza mai mare?
10 + 10 = 20 (km).
2) Cu cîţi km a parcurs mai mult <u>într-o oră</u>? 80 − 70 = 10 (km).
3) În cît timp a parcurs mai mult cu 20 km (în cît timp s-au acumulat în plus cei 20 km)? Dacă <u>într-o oră</u> o maşină a parcurs în plus 10 km, atunci, pentru a parcurge în plus 20 km, trebuie să treacă atîtea ore de cîte ori 10 se cuprinde în 20, adică 20 : 10 = 2 (ore).
4) Care este distanţa dintre cele două oraşe?
$2 \cdot 80 + 2 \cdot 70 = 160 + 140 = 300$ (km).

567. <u>Rezolvarea 1</u>
Dacă în 4 ore cei doi biciclişti parcurg 84 km, într-o oră amîndoi parcurg 84 : 4 = 21 km. Dacă în 4 ore unul a parcurs cu 4 km mai mult decît celălalt, rezultă că într-o oră va parcurge mai mult cu 4 : 4 = 1 km. Deci $v_1 + v_2 = 21$, iar $v_1 - v_2 = 1$. Este o problemă <u>de sumă şi diferenţă</u>. Rezultă: $v_2 = (21 - 1) : 2 = 10$ (km/h), iar $v_1 = 11$ km/h.
<u>Rezolvarea 2</u> Dacă $d_1 + d_2 = 84$ km, iar $d_1 = d_2 + 4$ km, rezultă o problemă <u>de sumă şi diferenţă</u>, adică $2d_2 = 80$ km $\Rightarrow d_2 = 40$ km, iar $v_2 = 40 : 4 = 10$ (km/h); $v_1 = (84 - 40) : 4 = 11$ (km/h).
<u>Rezolvarea 3</u> Dacă $d_1 = v_1 \cdot 4$, iar $d_2 = v_2 \cdot 4$, în care $v_1 = v_2 + 4 : 4$, rezultă $84 = 4(v_2 + 1) + 4v_2 \Leftrightarrow 84 = 8v_2 + 4 \Rightarrow v_2 = 10$ km/h; $v_1 = 11$ km/h.

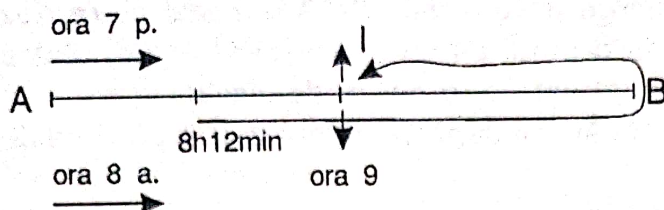
568. 1) După cîte ore de la plecare se întîlnesc cei doi? **11 − 8 = 3** (ore). Deoarece motociclistul merge cu o viteză de **3** ore mai mare, rezultă că punctul de întîlnire împarte drumul parcurs în **4** părţi egale, dintre care **3** părţi sînt parcurse de motociclist, iar o parte, de ciclist.
Atunci întîlnirea are loc la **3** pătrimi depărtare de A şi la o pătrime depărtare de B, adică:



2) Cît parcurge motociclistul în **3** ore? $\frac{3}{4}$; **3** sferturi din tot drumul AB.
3) În cîte ore parcurge motociclistul toată distanţa AB? (Dacă în **3** ore parcurge **3** sferturi din distanţă, într-o singură oră parcurge un singur sfert din distanţă, iar toată distanţa, **4** sferturi, este parcursă în **4** ore). **3 : 3 × 4 = 4** (ore).
4) În cîte ore parcurge biciclistul toată distanţa AB? (Dacă în **3** ore parcurge un sfert din distanţă, atunci cele **4** sferturi din distanţă sînt parcurse în **4 × 3 = 12** ore; sau: Biciclistul are o viteză de **3** ori mai mică decît motociclistul, deci pentru aceeaşi distanţă are nevoie de un timp de **3** ori mai mare decît timpul, de **4** ore, necesar motociclistului). **3·4 = 12** (ore) sau **3** : $\frac{1}{4}$ **= 3·4 = 12** (ore).
5) La ce oră ajunge motociclistul în B? **8 + 4 = 12**, deci la ora **12.**
6) La ce oră ajunge biciclistul în A? **8 + 12 = 20**, deci la ora **20.**

569. 1) În cît timp parcurge prima maşină distanţa dintre cele două localităţi? **12 − 8 = 4** (ore). (Deoarece viteza celei de-a doua maşini este mai mică de **2** ori, rezultă că timpul necesar pentru parcurgerea aceleiaşi distanţe este de **2** ori mai mare decît **4**, adică **2 × 4 = 8** ore).
2) La ce oră ajunge a doua maşină în localitatea de unde a plecat prima maşină, **8 + 2·4 = 16**, deci la ora **16.**
3) În cît timp parcurge prima maşină **2** treimi din distanţă? Datorită raportului dintre viteze, întîlnirea are loc la **2** treimi de prima localitate şi la o treime de a doua localitate.
Dacă în **4** ore prima maşină parcurge toată distanţa, atunci **2** treimi din distanţă sînt parcurse în **2·4 : 3 = 2** h şi **40** min.
4) La ce oră s-au întîlnit cele două maşini? **8h + 2h + 40** min **= 10h 40** min. (sau: Dacă în **8** ore a doua maşină parcurge toată distanţa, pentru o treime din distanţă vor fi necesare **2** h şi **40** min., căci **8h** : **3 = 2h** şi **40** min., iar întîlnirea are loc la **8h + 2h + 40** min **= 10h** şi **40** min.)

570. O reprezentare grafică poate fi:



1) Cît timp merge pietonul pînă este ajuns de autobuz? **8** h **12** min – – **7** h = **1** h și **12** min = **72** min.

2) Cît timp parcurge autobuzul aceeași distanță (pe care pietonul a parcurs-o în **72** minute)? **8** h **12** min – **8** h = **12** min. Fiind aceeași distanță, timpul necesar autobuzului este mai mic, deci viteza pietonului este mai mică.

3) De cîte ori este mai mare viteza autobuzului față de viteza pietonului? **72** min : **12** min = **6** (ori); sau : $d=12 \cdot v_a=72 \cdot v_p \Rightarrow v_a=6 \cdot v_p$.

4) Cît timp merge pietonul din momentul în care a fost depășit de autobuz pînă la întîlnirea cu acesta? **9** h – **8** h **12** min = **48** min.

5) În cît timp parcurge autobuzul distanța parcursă de pieton în cele **48** minute? Într-un timp de **6** ori mai mic, căci viteza lui este de **6** ori mai mare decît viteza pietonului, adică **48** : **6** = **8** (minute).

6) În cît timp autobuzul a parcurs distanța, la dus, de la punctul de întîlnire pînă în B? (**48** – **8**) : **2** = **20** (minute). Am împărțit la **2**, deoarece distanța IB este parcursă de **2** ori.

7) În cît timp autobuzul a parcurs toată distanța AB? **12** + **8** + **20** = = **40** (minute).

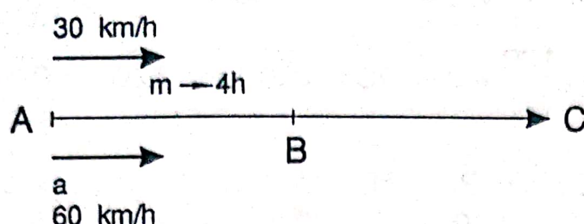
8) Care a fost viteza autobuzului? **24 000** m : **40** = **600** m/min.

9) Dar viteza pietonului? **600** : **6** = **100** m/min.

571. Potrivit formulei $d=v \cdot t$, pentru a calcula distanța parcursă în zbor de graur, trebuie să determinăm timpul în care a zburat graurul, viteza sa fiind de **90** km/h = **25** m/s. De unde putem afla timpul? El este același și pentru cei doi iepurași care parcurg împreună distanța de **400** m. Deoarece $t=d : v$, iar viteza de apropiere a celor doi iepurași este suma vitezelor lor, adică **3** + **2** = **5** (m/s), rezultă t = **400** : **5** = **80** (secunde). Ce distanță a parcurs graurul în **80** secunde? **80** × **25** = **2000** m = **2** km.

572. În zborul amețitor al rîndunicii ne este greu să deslușim cîte „drumuri" a parcurs ea. Dacă observăm că timpul cît mașina a parcurs drumul prin tunel este de $10 : 40 = \frac{1}{4}$ oră, iar viteza rîndunicii este de **4** × **40** km = **160** km/h, atunci putem determina distanța parcursă de aceasta în interiorul tunelului astfel: **160** : **4** = **40** km. Sau: Dacă în timpul t automobilul a parcurs distanța de **10** km (avînd viteza de **40** km/h), atunci rîndunica, tot în timpul t, avînd o viteza de **4** ori mai mare, va parcurge o distanță de **4** ori mai mare decît **10** km, adică **4** × **10** km = **40** km.

573. Rezolvarea 1



1) Cîți km parcurge motociclistul în cele **4** ore? **4 × 30 = 120** (km). Deci cînd autoturismul s-a pus în mișcare, motociclistul avea un avans de **140** km (se afla în punctul B). Pentru ca autoturismul să ajungă motociclistul, el trebuie să recupereze distanța de **120** km. (Cînd autoturismul a plecat la drum, motociclistul își continuă deplasarea spre punctul C). Este posibil ca autoturismul să ajungă motociclistul? Da, deoarece viteza mașinii este mai mare.

2) Cît recuperează într-o oră (care este diferența de viteze)?
60 − 30 = 30 (km/h).

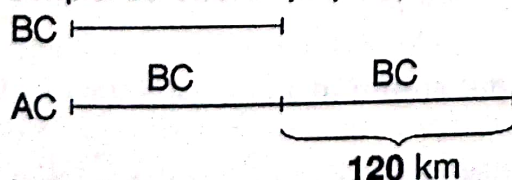
3) În cît timp autoturismul recuperează **120** km (în cît timp autoturismul ajunge motociclistul)? Dacă într-o oră autoturismul recuperează **30** km, pentru a recupera **120** km are nevoie de un timp mai mare, adică într-un număr de ore de cîte ori se cuprinde **30** în **120**. Deci: **120 : 30 = 4** (ore). În exercițiu: **4 × 30 : (60 − 30) = 120 : 30 = 4** (ore).

Rezolvarea 2

Plecînd de la exercițiul anterior și notînd cu d distanța pe care trebuie să o recupereze autoturismul, cu v_1 viteza motociclistului, cu v_2 viteza autoturismului, în care $v_2 > v_1$, putem generaliza: $t = d : (v_2 - v_1)$, dacă $v_2 > v_1$. Aplicînd această formulă obținem: $t = (4 \times 30) : (60 - 30) = 4$ (ore).

Rezolvarea 3

Fie C punctul în care autoturismul ajunge motociclistul. Se observă (pe reprezentarea grafică) că în timp ce autoturismul parcurge distanța AC (tot drumul), motociclistul parcurge numai distanța BC. Deci AC − BC = **4 × 30** = = **120** (km). Deoarece timpul este același pentru ambele autovehicule, diferența de distanță provine din faptul că vitezele sînt diferite. Rezultă că distanța AC va fi mai mare decît distanța BC de atîtea ori de cîte ori viteza motociclistului se cuprinde în viteza autoturismului, adică AC : BC = **60 : 30** ⇒ AC : BC = **2**. Deci AC − BC = **120** km, AC = **2**·BC. De aici avem o problemă simplă de diferență și raport. Putem realiza o reprezentare grafică:



În cît timp autoturismul ajunge motociclistul? **120 : 30 = 4** (h) sau **2 × 120 : 60 = 4** (h).

Observatie: Elevii mari pot lucra cu ajutorul proporțiilor: $\frac{AC}{60}=\frac{BC}{30} \Rightarrow$
$\frac{AC}{BC}=\frac{60}{30} \Rightarrow \frac{AC-BC}{BC}=\frac{60-30}{30} \Rightarrow \frac{120}{BC}=1 \Rightarrow BC=120$ km; $120 : 30=4$ (h).

Rezolvarea 4
Se știe că $d=v \cdot t$. Deci $AC=60 \cdot t$, iar $BC=30 \cdot t$. Atunci $AC-BC= 60t-30t \Rightarrow 60t-30t=4 \times 30 \Rightarrow 30t=120 \Rightarrow t=120 : 3 \Rightarrow t=4$ (h).

574. Rezolvarea 1 Pentru a afla distanța, trebuie să știm viteza și timpul, căci $d=v \cdot t$. Viteza este dată. Cum putem afla timpul? Găsim vreo relație între distanța de 18 km și viteze? Din ce cauză a rămas al doilea biciclist în urmă? Datorită faptului că în fiecare oră el a parcurs cu 3 km mai puțin, căci $12-9=3$. În cîte ore a rămas în urmă cu 18 km (în cîte ore a parcurs primul biciclist distanța dintre localități)? În atîtea ore de cîte ori 3 se cuprinde în 18, adică $18 : 3=6$ ore. Care este distanța dintre cele două localități? (Dacă într-o oră primul biciclist parcurge 12 km, în 6 ore parcurge o distanță de 6 ori mai mare) $6 \times 12=72$ (km).

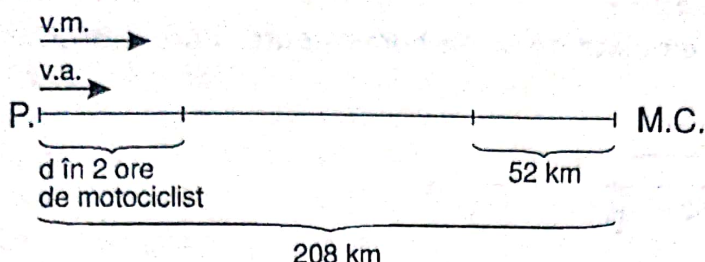
Rezolvarea 2 Din relația $d=v_1 \cdot t_1$ sau $d=v_2 \cdot t_2$, rezultă
$d=[18 : (12-9)] \cdot 2=(18 : 3) \times 12=6 \times 12=72$ (km) sau
$d=[6+(18 : 9)] \times 9=(6+2) \cdot 9=8 \cdot 9=72$ (km).

Rezolvarea 3 Primul biciclist parcurge toată distanța (d) în $t_1=\frac{d}{v_1}=\frac{d}{12}$, iar al doilea în $t_2=\frac{d}{v_2}=\frac{d}{9}$. Deoarece $v_1>v_2$, rezultă $t_1<t_2$. Din enunț rezultă $t_2-t_1=18 : 9=2$ (ore). Deci $\frac{d}{9}-\frac{d}{12}=2 \Rightarrow \frac{4d-3d}{36}=2 \Rightarrow \frac{d}{36}=2 \Rightarrow d=72$ km.

575. Rezolvarea 1 Dacă cel de-al doilea pieton mai are nevoie de o oră și jumătate pentru a ajunge la destinație, ce distanță mai are de parcurs? Într-o oră parcurge 4 km, iar într-o jumătate de oră 2 km, deci mai are de parcurs $4+2=6$ km. În cît timp s-a acumulat această diferență de 6 km? Dacă într-o oră al doilea pieton rămîne în urmă cu $6-4=2$ km, pentru a se acumula diferența de 6 km, cîte ore au trecut (în cîte ore a parcurs primul pieton tot drumul)? Atîtea ore, de cîte ori 2 se cuprinde în 6, adică $6 : 2=3$ ore. Care este distanța dintre cele două localități? $6 \times 3=18$ (km) sau
$4 \cdot (3+1\frac{1}{2})=12+4+2=18$ (km).

Rezolvarea 2 Primul pieton parcurge distanța d în $t_1=\frac{d}{6}$, al doilea în $t_2=\frac{d}{4}$.
Dacă $v_1>v_2$, rezultă $t_1<t_2$. Din enunț rezultă $t_2-t_1=1\frac{1}{2}$ ore $\Rightarrow \frac{d}{4}-\frac{d}{6}=1\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\frac{d}{12}=\frac{3}{2} \Rightarrow d=12 \cdot 3 : 2 \Rightarrow d=18$ (km).

576. <u>Rezolvarea 1</u> Reprezentarea grafică poate fi:



Care era viteza medie a motociclistului? **208 : 8 = 26** (km/h). Cîți km parcurge acesta în **2** ore? **2 × 26 = 52** (km). Cîți km mai parcurge motociclistul pînă este ajuns de automobilist? **208 − 52 − 52 = 104** (km). În cîte ore parcurge motociclistul cei **104** km? $t = d : v \Rightarrow t = 104 : 26 = 4$ (ore). În acest timp de **4** ore automobilistul parcurge toată distanța de la Ploiești pînă la punctul în care l-a ajuns pe motociclist. Ce distanță parcurge automobilistul în **4** ore? **52 + 104 = 156** (km). Care era viteza automobilistului? **156 : 4 = 39** (km/h).

<u>Rezolvarea 2</u>

Care era viteza motociclistului? **208 : 8 = 26** (km/h). În cît timp ar mai parcurge motociclistul ultimii **52** km? **52 : 26 = 2** (ore). Cîte ore a fost „urmărit" de automobilist? **8 − 2 − 2 = 4** (ore). Care era distanța parcursă de automobilist în **4** ore? **208 − 52 = 156** (km). Care era viteza automobilistului? **156 : 4 = 39** (km/h).

<u>Rezolvarea 3</u>

Notăm cu v_a viteza automobilistului. Care era viteza motociclistului? **208 : 8 = 26** (km/h). Cîți km parcurge acesta în **2** ore? **2 × 26 = 52** (km). În cît timp (t) recuperează automobilistul cei **52** km? $52 : (v_a - 26) = t$. Ce distanță parcurge motociclistul pînă este ajuns? **208 − 52 = 156** (km). În cît timp (t) parcurge automobilistul distanța de **156** km? $156 : v_a = t$. Cei doi timpi sînt egali. Rezultă: $156 : v_a = 52 : (v_a - 26) \Rightarrow \frac{156}{v_a} = \frac{52}{v_a - 26} \Rightarrow 52 \cdot v_a = 156 v_a - 156 \cdot 26 / : 26 \Rightarrow 2 \cdot v_a = 6 v_a - 156 \Rightarrow 6 v_a - 2 v_a = 156 \Rightarrow 4 v_a = 156 \Rightarrow v_a = 39$ (km/h).

577. Este o problemă mai dificilă pe care o putem rezolva dacă înțelegem următoarele:

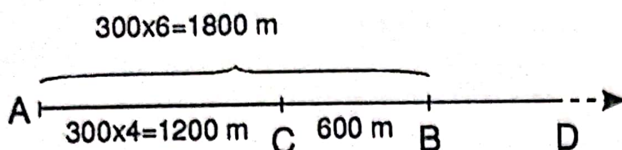
– al doilea biciclist rămîne în urmă cu **2** m la fiecare secundă;

– cît timp primul biciclist verifică roțile bicicletei, al doilea își continuă deplasarea, trecînd de primul biciclist;

– cînd își <u>reîncepe</u> deplasarea, primul biciclist trebuie să recupereze o anumită distanță, adică acel spațiu pe care al doilea l-a parcurs din dreptul punctului în care primul se oprise pînă la punctul în care al doilea se afla cînd s-a început „urmărirea";

– cînd primul începe „urmărirea", al doilea nu se oprește, ci își continuă drumul.

Pentru a lucra numai cu numere naturale, transformăm minutele în secunde: 5 min = 300 s; 7 min = 420 s.
Graficul cu reprezentarea distanţelor parcurse poate fi următorul:



<u>Rezolvarea 1</u>
Cîţi m parcurge fiecare biciclist în primele 300 s? I: 300·6 = 1 800 (m); II: 300·4 = 1 200 (m). Cu cîţi m parcurge mai mult primul faţă de al doilea biciclist în aceste 300 s? 1 800 − 1 200 = 600 (m). Ca să îl <u>ajungă</u> pe al doilea (căci s-a oprit pentru verificarea roţilor), primului biciclist îi trebuie 7 minute, adică 420 s. Ce distanţă parcurge primul biciclist pînă îl ajunge pe al doilea (după momentul opririi)? 420 × 6 = 2 520 (m). Ce distanţă a parcurs al doilea biciclist din momentul în care primul biciclist s-a oprit şi pînă l-a ajuns? 600 + 2 520 = 3 120 (m). În cît timp parcurge al doilea biciclist această distanţă? 3 120 : 4 = 780 secunde = 13 minute. Cîte minute a staţionat primul biciclist? 13 − 7 = 6 (minute) <u>sau</u> (1 200 + 600 + 2 520) : 4 − − (1 800 + 2 520) : 6 = 1 080 − 720 = 360 (secunde) ⇒ 6 minute.

<u>Rezolvarea 2</u>
Cîţi m parcurge fiecare biciclist în primele 5 minute (în 300 s)?
I: 300 × 6 = 1 800 (m); II: 300 × 4 = 1 200 (m). Cu cîţi m parcurge mai mult primul biciclist faţă de al doilea în aceste 5 minute? 1 800 − 1 200 = 600 (m). Dar într-o secundă (diferenţa de viteze)? 6 − 4 = 2 (m). (Deci cînd primul biciclist se opreşte, al doilea avea de recuperat 600 m, pentru care îi trebuie 600 : 4 = 150 secunde. După aceste 150 secunde, trece şi el prin punctul în care staţiona primul biciclist). În cît timp parcurge al doilea biciclist cei 600 m? 600 : 4 = 150 (secunde). Ce distanţă <u>mai</u> parcurge al doilea <u>pînă cînd primul reîncepe deplasarea</u> („urmărirea")? O distanţă pe care primul o recuperează în 7 minute, adică în 420 secunde. Dacă într-o secundă recuperează 2 m, în 420 secunde, ce distanţă recuperează? De 420 de ori cîte 2 m, adică 420 × 2 = 840 (m). Deci cînd primul <u>reîncepe</u> deplasarea, al doilea biciclist avea un avans de 840 m. În cît timp a parcurs al doilea biciclist cei 840 m? 840 : 4 = 210 (s). Cîte secunde a staţionat primul biciclist? 150 secunde (cînd al doilea a parcurs cei 600 m) plus 210 secunde (cînd al doilea a parcurs 840 m), adică 150 + 210 = 360 (secunde) ⇒ 6 minute.

<u>Rezolvarea 3</u>
De la rezolvările anterioare, reţinem că în 5 minute primul biciclist parcurge 1 800 m, deci cu 600 m mai mult decît 1 200 m, cît străbate al doilea în acelaşi timp. Ce distanţă parcurge al doilea biciclist în timpul în care primul stă? Distanţa de 600 m plus distanţa pentru care primului biciclist îi sînt

necesare **7** minute (sau **420** s) ca să o recupereze, adică **600 + 420·(6 − − 4) = 600 + 840 = 1 440** (m), căci $d = t(v_1 - v_2)$. Cît timp primul biciclist verifică roţile bicicletei (în cît timp parcurge al doilea biciclist cei **1440** m)? **1440 : 4 = 360** (secunde) ⇒ **6** minute.

578. (Asemănătoare cu problema anterioară) Cîţi km parcurge fiecare autoturism în cele **2** ore? I: **2 × 48 = 96** (km); II: **2 × 36 = 72** (km). Cu cîţi km parcurge mai mult primul autoturism faţă de celălalt în cele **2** ore? **96 − 72 = 24** (km). Ce distanţă parcurge primul autoturism după reluarea deplasării pînă îl ajunge pe al doilea? **4 × 48 = 192** (km). Ce distanţă a parcurs al doilea autoturism <u>din</u> momentul în care primul s-a oprit şi <u>pînă</u> este ajuns de acesta? **192 + 24 = 216** (km). În cît timp parcurge al doilea autoturism această distanţă? **216 : 36 = 6** (ore). Cît timp a staţionat primul autoturism? **6 − 4 = 2** (ore). Pentru alte soluţii, a se vedea problema anterioară.

579. Într-o oră, al doilea recuperează **20** km, deoarece **60 − 40 = 20**. Dacă într-o oră recuperează **20** km, atunci în **15** minute, adică în $\frac{1}{4}$ h, ce distanţă recuperează? De **4** ori mai puţin decît **20**, adică **20 : 4 = 5** (km).

580. Pentru a determina timpul necesar biciclistului, trebuie să determinăm distanţa AB. La ora cînd primul motociclist a ajuns în B, al doilea mai avea **2** ore de mers, căci **10 − 8 = 2**. Ce distanţă mai avea al doilea ca să ajungă în B? **2 × 30 = 60** (km). Din ce cauză s-a realizat această diferenţă de distanţă? Din cauză că al doilea parcurge într-o oră cu **20** km mai puţin, căci **50 − 30 = 20**. În cîte ore s-a realizat diferenţa de **60** km? Dacă într-o oră diferenţa este de **20** km, atunci diferenţa de **60** km s-a acumulat în **60 : 20 = 3** ore, tocmai timpul în care primul motociclist a parcurs toată distanţa AB. În cîte ore al doilea motociclist a parcurs tot drumul? **3 + 2 = 5** (ore). La ce oră au plecat din oraşul B?, adică **? + 5 = 10**. **10h − 5h = 5h**, deci la ora **5**. Care este distanţa dintre A şi B? **3 × 50 = 150** (km) sau **5 × 30 = 150** (km). În cît timp parcurge biciclistul **150** km? **150 : 10 = 15** (ore). La ce oră ajunge biciclistul în B? **5h + 15h = 20h**, deci la ora **20**.

581. Cîţi km parcurge ciclistul în **4** ore? **4 × 20 = 80** (km). Cîţi km recuperează motociclistul într-o oră? **60 − 20 = 40** (km). În cîte ore recuperează motociclistul **80** de km? **80 : 40 = 2** (h). În cîte ore parcurge motociclistul tot drumul? **240 : 60 = 4** (h). De cîte ore are nevoie motociclistul, <u>după ce l-a ajuns pe ciclist</u>, ca să ajungă în B? **4 − 2 = 2** (h). Ce distanţă parcurge ciclistul în aceste **2** ore? **2 × 20 = 40** (km).
Ce distanţă parcurg amîndoi <u>în sens contrar</u> (Ce distanţă i-a rămas ciclistului pînă în B)?

240	−	(**80** ciclist singur	+	**40** pînă este ajuns	+	**40**) pînă cînd motociclistul ajunge în B	=	**240 − 160 = 80** (km)

Din momentul în care cei doi se deplasează în sensuri contrare, în cîte ore parcurg amîndoi distanța de 80 km?
a) Cîți km parcurg amîndoi într-o oră? $60+20=80$ (km).
b) În cît timp vor parcurge cei 80 km? $80:80=1$ (h).
Deci după o oră de la plecarea motociclistului din B se întîlnesc.
La ce oră se întîlnesc?

11 h (ora plecării)	+	4 h pînă cînd motociclistul a ajuns în B	+	1 h pînă la întîlnire	=	16 h

Sau:
pentru ciclist, calculul este:

$(11-4)$ h (ora plecării)	+	4 h singur	+	2 h pînă a fost ajuns	+	2 h pînă m. a ajuns în B	+	1 h pînă la întîlnire	=	16 h

La ce distanță de orașul B se întîlnesc?
Dacă motociclistului i-a trebuit o oră după ce a plecat din B ca să se întîlnească cu ciclistul, înseamnă că punctul de întîlnire este așezat tocmai la distanța de 60 km de B (viteza motociclistului) sau: $240-(80+40+40+20)=$ $=240-180=60$ (km de B). Răspuns: orele 16; la 60 km distanță de B.

582. Rezolvarea 1
Pentru a afla viteza lui Tibi, trebuie să determinăm distanța pe care o parcurge și timpul necesar. De unde le putem afla? Distanța este aceeași pentru fiecare. Nu o putem determina, „combinînd" relațiile date pentru ceilalți concurenți? Ba da. Cum? Cînd Dinu a terminat parcursul, Alex mai avea nevoie de 4 secunde, căci $2+2=4$. În aceste 4 secunde, el parcurge 12 m, căci $4\times3=12$. În cîte secunde a parcurs Dinu tot traseul (În cîte secunde a parcurs Alex o distanță cu 12 m mai puțin decît tot traseul)?
a) Cu cîți m rămîne în urmă Alex față de Dinu, într-o singură secundă (care este diferența de viteze)? $6-3=3$ (m).
b) Atunci, cîte secunde trebuie să treacă pentru ca Alex să rămînă în urmă cu 12 m? $12:3=4$ (secunde, timpul necesar lui Dinu pentru a parcurge tot traseul).
Rezultă că timpul necesar lui Tibi a fost de 6 s, căci $4+2=6$, iar distanța parcursă a fost de $6\times4=24$ m (sau: timpul necesar lui Alex a fost de $4+4=8$ s, iar distanța parcursă a fost de $8\times3=24$ m). Viteza de deplasare a lui Tibi a fost de $24:6=4$ m/s.
Rezolvarea 2
Notăm cu d distanța parcursă, cu t timpul necesar lui Tibi.
Putem scrie: $3(t+2)=6(t-2)\Rightarrow 3t+6=6t-12\Rightarrow 6=3t-12\Rightarrow t=6$ (s); deoarece $d=3(6+2)\Rightarrow d=24$, iar viteza lui Tibi era de $24:6=4$ m/s.

583. a) Pentru a merge de la un capăt la altul al coloanei, biciclistul trebuie să treacă de ultimul sportiv din coloană. Dacă acesta ar staționa, biciclistul ar parcurge singur distanța egală cu lungimea coloanei. Or, coloana se deplasează în sens contrar biciclistului, deci trebuie să luăm în calcul și viteza de deplasare a coloanei. Putem reformula problema: „Ce distanță parcurge un biciclist, respectiv un sportiv (ultimul din coloană), în 5 secunde, dacă se deplasează în sens contrar și avînd vitezele menționate? Cîți m parcurg împreună coloana și biciclistul într-o singură secundă? $(360+60) : 60=7$ (m). Cîți m parcurg în 5 secunde (Care este lungimea coloanei de sportivi)? $5\times7=35$ (m) sau $d=v \cdot t \Rightarrow d=(360+60) : 60\times5=7\times5=35$ (m).

b) Biciclistul trebuie să treacă de primul sportiv din coloană. Practic, între acesta și biciclist este o distanță egală cu lungimea coloanei. Cu cîți m va înainta mai mult biciclistul față de coloană (de primul sportiv) într-o singură secundă? $(360-60) : 60=5$ (m).

Dacă într-o secundă biciclistul recuperează 5 m, atunci în 7 secunde el recuperează toată distanța egală cu lungimea coloanei. Care este lungimea coloanei de sportivi? $7\times5=35$ (m)

sau: $d=v \cdot t \Rightarrow d=(360-60) : 60\times7=35$ (m).

584. Rezolvarea 1

Care ar fi viteza acceleratului, dacă trenul personal ar staționa (adică viteza aparentă a acceleratului)? Deoarece în 2 secunde trenul accelerat trece de trenul personal, cu toată lungimea de 50 m, înseamnă că într-o secundă el ar parcurge $50 : 2=25$ m/s. Or, trenul personal se deplasează în sens contrar, deci în cei 25 m/s este inclusă și viteza acestuia. Care este viteza reală a acceleratului? 25m/s – 10m/s = 15m/s.

Rezolvarea 2

Dacă notăm cu v viteza reală a acceleratului, atunci viteza aparentă a acestuia va fi $v+10$ m/s. Pentru a afla viteza reală a acceleratului, aplicăm formula $(v+10) \cdot t=d$, adică $v+10=d : t$; rezultă $v+10=50 : 2 \Rightarrow v+10=$ $=25 \Rightarrow v=15$ m/s.

585. Pentru ca trenul accelerat să depășească trenul personal, mergînd în același sens, este necesar ca ultimul vagon să fie în continuarea locomotivei trenului personal.

Ce distanță parcurge trenul accelerat? Cei 60 m, cît este lungimea trenului personal, plus cei 42 m, cît este lungimea sa, pentru ca ultimul său vagon să depășească locomotiva trenului personal, adică: $60+42=102$ (m).

Cu ce viteză trec trenurile, unul pe lîngă celălalt? Dacă notăm cu v_a viteza acceleratului, iar cu v_p viteza personalului, putem scrie că v_a-v_p este tocmai viteza cu care acceleratul trece de trenul personal.

Deoarece $v \cdot t=d$, rezultă $(v_a-v_p) \cdot 17=102 \Rightarrow v_a-v_p=102 : 17 \Rightarrow$ $v_a-v_p=6$ m/s. Cînd deplasarea se face în sensuri contrare, distanța de 102 m este parcursă în 3 secunde de ambele trenuri. Ce distanță parcurg

ambele trenuri într-o singură secundă, adică $v_a+v_p=?$ Deoarece $v \cdot t=d$, rezultă $(v_a+v_p)\cdot 3=102 \Rightarrow v_a+v_p=34$ m/s. De aici avem o problemă simplă de sumă și diferență, adică $v_a+v_p=34$ m/s, iar $v_a-v_p=6$ m/s. Aplicînd una dintre metodele folosite la problema II.1 din volumul 1, obținem: $2v_p=34-6 \Rightarrow v_p=14$ m/s, iar $v_a=14+6 \Rightarrow v_a=20$ m/s.

586. Asemănătoare cu problema anterioară.

a) Mergînd în sensuri contrare, trenurile trec unul pe lîngă celălalt cu o viteză egală cu suma vitezelor lor. Ce distanță parcurg trenurile într-o singură unitate de timp? $72+54=126$ km/h$=35$ m/s. Ce distanță parcurg trenurile în timpul în care trec unul pe lîngă celălalt? $326+374=700$ (m). În cît timp parcurg trenurile 700 m? $700 : 35=20$ secunde.

b) Mergînd în același sens, trenurile trec unul pe lîngă celălalt cu o viteză egală cu diferența vitezelor lor. Cu cîți km parcurge mai mult primul tren față de al doilea într-o singură unitate de timp? $72-54=18$ km/h$=5$ m/s. Ce distanță parcurg trenurile în timpul în care trec unul pe lîngă celălalt? $326+374=700$ (m). În cît timp parcurg trenurile astfel 700 m? $700 : 5=$ $=140$ secunde$=2$ min și 20 secunde.

587. Rezolvarea 1

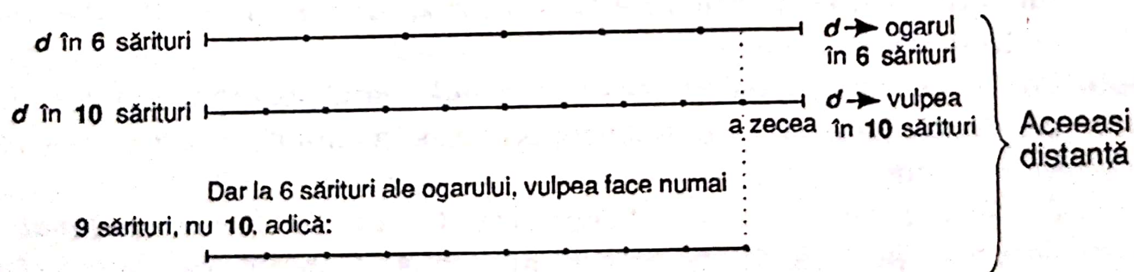
Pe scurt, ultimele două relații:

ogarul face 2 sărituri în timp ce vulpea face 3, iar distanța parcursă de ogar în 3 sărituri este parcursă de vulpe în 5 sărituri.

Aducem la același termen de comparație (același număr de sărituri ale ogarului), prin înmulțirea fiecărui termen din prima relație cu 3, iar a celor din a doua, cu 2, astfel:

Ogarul	Vulpea
6 sărituri în timpul a	9 sărituri, iar
6 sărituri fac cît	10 sărituri.

Se poate apela la o reprezentare grafică:



Cîte sărituri de-ale vulpii recuperează ogarul la un grup de 6 sărituri? $10-9=1$ (săritură). Cîte grupe de cîte 6 sărituri trebuie să efectueze ogarul pentru a ajunge vulpea (pentru a recupera cele 15 sărituri)? Dacă la o singură grupă de 6 sărituri, el recuperează o singură săritură de-a vulpii, pentru a recupera 15 sărituri el va efectua atîtea grupe de sărituri, de cîte ori se cuprinde 1 în 15, adică $15 : 1=15$ grupe. Cîte sărituri efectuează ogarul pentru a ajunge vulpea? $6\times 15=90$ sărituri.

Rezolvarea 2

1) Cît reprezintă o săritură a ogarului dintr-o săritură a vulpii? Dacă în **3** sărituri ogarul parcurge aceeași distanță cît vulpea în **5**, atunci într-o săritură ogarul parcurge o distanță mai mică de **3** ori decît vulpea în **5**, adică $\frac{5}{3}$.

2) Cîte sărituri de vulpe reprezintă cele **2** sărituri ale ogarului? Dacă una reprezintă cît $\frac{5}{3}$ sărituri de-ale vulpii, atunci **2** reprezintă cît $2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ sărituri de-ale vulpii. Dacă în timp ce ogarul efectuează **2** sărituri (echivalente cu $\frac{10}{3}$ sărituri de vulpe), vulpea face **3** sărituri, cît recuperează ogarul la un grup de **2** sărituri? $\frac{10}{3} - 3 = \frac{10}{3} - \frac{9}{3} = \frac{1}{3}$ (săritură de vulpe).

3) Cît recuperează ogarul la o singură săritură?

De **2** ori mai puțin decît $\frac{1}{3}$, adică $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$ săritură de vulpe.

4) Cîte sărituri trebuie să efectueze ogarul, pentru a recupera cele **15** sărituri ale vulpii? Dacă la o săritură de-a lui, ogarul recuperează $\frac{1}{6}$ săritură de vulpe, cîte sărituri îi trebuie pentru a recupera **15** sărituri de vulpe (ca să o ajungă)? $15 \cdot 1 : \frac{1}{6} = 15 \cdot 6 = 90$ sărituri de-ale ogarului.

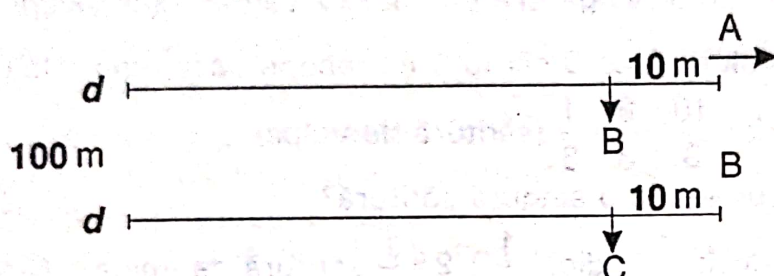
588. Încercați o reprezentare grafică (asemănătoare celei de la problema anterioară) și veți constata că, la **2** sărituri de-ale sale, cîinele cîștigă **2** sărituri de iepure, adică la fiecare săritură de-a sa cîștigă o săritură de iepure. Pentru a cîștiga **75** sărituri (pentru a ajunge iepurele), cîinele face **75 : 1 = 75** sărituri.

589. La un grup de **5** sărituri de-ale sale, cîinele cîștigă **8 − 6 = 2** sărituri de pisică, adică la o săritură de-a sa el cîștigă $\frac{2}{5}$ dintr-o săritură de pisică. Pentru a ajunge din urmă pisica, el trebuie să cîștige **24** sărituri și de aceea va face $24 : \frac{2}{5} = 24 \times 5 : 2 = 60$ sărituri.

590. Deci ogarul face **6** sărituri în timp ce vulpea face **9** sărituri, iar ogarul în **3** sărituri parcurge cît vulpea în **7** sărituri. Aducem la același termen de comparație, înmulțind cu **2** fiecare membru al celei de-a doua relații, adică **6** sărituri de ogar fac cît **14** sărituri de vulpe.
La un grup de **6** sărituri de-ale sale ogarul cîștigă **14 − 9 = 5** sărituri de vulpe, iar la fiecare săritură a sa cîștigă **5** șesimi dintr-o săritură de vulpe. Pentru a cîștiga **60** de sărituri de vulpe, ogarul va face **72** sărituri, căci **60 : 5 × 6 = 72.**

591. Relația referitoare la ritm, ce trebuie eliminată, este „vulpea face 9 sărituri, în timp ce ogarul face 6". Dacă 3 sărituri ale ogarului fac cît 7 sărituri de vulpe, o săritură a sa face cît $\frac{7}{3}$ sărituri de vulpe. Cît recuperează din distanță (cît cîștigă) ogarul la o singură săritură a sa? $\frac{7}{3}-\frac{3}{3}=\frac{4}{3}$ sărituri de vulpe. Cîte sărituri trebuie să facă ogarul pentru a recupera cele 60 sărituri de vulpe? $60 \cdot 3 : 4 = 45$ sărituri.

592. a) Rezolvarea 1



Dacă la 100 m (adică după ce B parcurge și cei 10 m), C rămîne în urmă cu 10 m, adică parcurge numai 90 m (căci $100-10=90$), atunci în timpul în care B parcurge cei 10 m, ce distanță parcurge C? Dacă B parcurge 100 m în timp ce copilul C parcurge 90 m, atunci cînd B parcurge 10 m, ce distanță parcurge copilul C? O distanță de 10 ori mai mică decît 90 m (căci și 10 m este mai mic decît 100 m de 10 ori), adică $90 : 10 = 9$ m. Deci cînd A era pe punctul de sosire, B era la o distanță de 10 m, iar C era în urma lui B cu 9 m. Răspuns: Cînd A a ajuns pe punctul de sosire, C era la o distanță de 19 m față de A, căci $10+9=19$ (m).

Rezolvarea 2

Se știe că $v \cdot t = d$. Atunci $v_A \cdot t = 100$ m; $v_B \cdot t - v_C \cdot t = 10$ m, sau $v_A \cdot t - v_B \cdot t = 10$ m. Dacă A parcurge 100 m în timpul (același) cît B parcurge 100 m $-$ 10 m $=$ 90 m, rezultă că $v_B = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ din v_A. Dacă B parcurge 100 m, în timpul (același) cît C parcurge 100 m $-$ 10 m $=$ 90 m, înseamnă că viteza lui C este cît $\frac{9}{10}$ din viteza lui B, dar $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10}$ din viteza lui A, adică $v_C = \frac{81}{100}$ din v_A. Deci în timpul în care A parcurge 100 m, C parcurge numai 81 m. Atunci cînd A ajunge la punctul de sosire, C mai avea de parcurs 19 m, căci $100-81=19$ (m).

b) Rezolvarea 1

Dacă la 3 m, Dan recuperează 2 m (căci $3-1=2$), atunci la ce distanță recuperează 30 m (pentru a ajunge în același timp la punctul de sosire)? Deoarece 30 este mai mare decît 2 de 15 ori, atunci și distanța totală par-

cursă de Dan va fi de 15 ori mai mare decît 3, adică $15 \times 3 = 45$ (m); Ionuț a parcurs 15 m, căci $45 - 30 = 15$ sau $45 : 3 = 15$.

Rezolvarea 2

Deoarece viteza lui Dan este de 3 ori mai mare decît viteza lui Ionuț, atunci Dan parcurge o distanță totală de 3 ori mai mare decît a prietenului său (timpul fiind același); deci distanța parcursă de Dan este cu 2 părți mai mare decît distanța parcursă de Ionuț, ceea ce reprezintă tocmai 30 m.

Cîți m a parcurs Ionuț? $30 : 2 = 15$ (m).

Dar Dan? $15 + 30 = 45$ sau $15 \times 3 = 45$ (m).

593. Rezolvarea 1

Notăm cu v_1 viteza vaporului în apă stătătoare și cu v_2 viteza de curgere a apei. Cînd merge în sensul de curgere a apei, viteza v a vaporului este compusă din $v_1 + v_2$. Cînd merge împotriva apei, viteza de deplasare a vaporului este $v_1 - v_2$, căci i se împotrivește cursul apei. În general, $d = v \cdot t$. Rezultă că:

a) $20 = (v_1 + v_2) \cdot 2 \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 10$ (cînd se deplasează în sensul de curgere a apei);

b) $20 = (v_1 - v_2) \cdot 4 \Leftrightarrow v_1 - v_2 = 5$ (cînd se deplasează contra apei).

De aici putem privi problema ca pe una în care avem suma și diferența a două mărimi, adică:

v_2 |——|

v_1 |——|——5——|

$\} \; 10 \Rightarrow 2v_2 = 5 \Rightarrow v_2 = 2\frac{1}{2}$ km/h.

Rezolvarea 2

Cînd merge în sensul de curgere a apei, viteza de deplasare a vaporului este compusă din $v_1 + v_2$, adică din viteza vaporului în apă stătătoare și din viteza de curgere a apei. La întoarcere, viteza de deplasare se obține prin deducerea lui v_2 din v_1, adică $v_1 - v_2$. Într-o oră, la dus, vaporul parcurge o distanță de $1 \cdot (v_1 + v_2) = v_1 + v_2$, iar la dus, $v_1 - v_2$. Considerînd drumul d un întreg (1), dacă la dus vaporul îl parcurge în 2 ore, atunci într-o singură oră parcurge $\frac{1}{2}d$, iar la întoarcere, într-o oră, $\frac{1}{4}d$. Atunci $\frac{1}{2}d - \frac{1}{4}d = v_1 + v_2 - (v_1 - v_2) \Leftrightarrow \frac{2-1}{4}d = v_1 + v_2 - v_1 + v_2; \Leftrightarrow \frac{1}{4}d = 2 \cdot v_2$; dar $d = 20$ km, atunci $2 \cdot v_2 = \frac{1}{4} \cdot 20 \Rightarrow v_2 = 5 : 2 \Rightarrow v_2 = 2\frac{1}{2}$ km/h.

594. Ce distanță parcurge Vasile în patru pași? $4 \times 70 = 280$ (cm). Care este lungimea pasului lui Ion? $280 : 7 = 40$ (cm).

595. Notăm cu d distanța parcursă la dus sau la întors, cu v_1 viteza bărcii în apă stătătoare, cu v_2 viteza cursului de apă (care este de fapt și viteza luntrei). Cînd merge în sensul de curgere a apei viteza de deplasare a bărcii este

compusă : v_1+v_2, iar cea cu care merge împotriva curentului de apă este v_1-v_2. Considerăm d un întreg. Atunci, <u>într-o oră</u>, barca la dus parcurge $\frac{1}{4}$ din drum, iar la întors (împotriva apei), $\frac{1}{5}$ din drum. Aceste două relații le mai putem scrie și în alt mod: dacă la dus viteza de deplasare este v_1+v_2, rezultă că <u>într-o oră</u> parcurge $1\cdot(v_1+v_2)$; dacă la întors viteza este v_1-v_2, rezultă că <u>într-o oră</u> parcurge $1\cdot(v_1-v_2)$. Atunci $\frac{1}{4}$ din drum este echivalent cu v_1+v_2, iar $\frac{1}{5}$ din drum este echivalent cu v_1-v_2.

Rezultă: $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=v_1+v_2-(v_1-v_2) \Leftrightarrow \frac{1}{20}=2v_2 \Rightarrow v_2=\frac{1}{20}:2 \Rightarrow v_2=\frac{1}{40}$ km/h, adică într-o oră luntrea parcurge $\frac{1}{40}$ din distanță, iar toată distanța o va parcurge în **40** de ore. Într-un alt mod de rezolvare veți obține:

$$v_1+v_2 Vve v_1-v_2=\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{v_1+v_2+v_1-v_2}{v_1+v_2-v_1+v_2}=\frac{5+4}{5-4} \Rightarrow \frac{2v_1}{2v_2}=\frac{9}{1} \Rightarrow v_1=9v_2 \text{ etc.}$$

CAPITOLUL IV

Probleme de logică și perspicacitate

IV. Enunțuri

596. În jurul unui bazin dreptunghiular, cu lungimea de **12** m și lățimea de **9** m, s-au plantat pomi la interval de **3** m unul de altul.
Cîți pomi s-au plantat?

597. O curte în formă de pătrat cu latura de **7** m este împrejmuită cu un gard care are **14** stîlpi de susținere. Care este distanța dintre primii **2** stîlpi?

598. Cîți stîlpi de telegraf sînt pe o șosea lungă de **5** km, știind că distanța dintre ultimii **2** stîlpi este de **50** m?

599. Într-o livadă cu lungimea de **95** m sînt plantați meri la distanța de **7** m unul de altul, la **2** m de margini. Sînt în total **15** rînduri de meri.
Cîți meri sînt în acea livadă?

600. Pe un bulevard, lung de **1** km, sînt plantați **202** pomi, dispuși în mod egal pe ambele părți ale bulevardului, la distanțe egale unul de altul.
Ce distanță este între **2** pomi alăturați?

601. O parte a gardului de la curtea bunicilor, lungă de **14** m, trebuie înlocuită. Știind că din vechiul gard vor rămîne numai stîlpii de beton din capetele gardului înlocuit, iar stîlpii noi vor fi plantați din **2** în **2** m, aflați cîți stîlpi sînt necesari.

602. **672** m de sîrmă, dispusă pe **4** rînduri, împrejmuiesc un teren dreptunghiular. Pe o lungime s-au folosit cu **72** m mai multă sîrmă decît pe o lățime. Știind că sîrma este susținută de stîlpi așezați la **3** m unul de altul, aflați numărul acestora de pe cele două lățimi ale terenului.

603. Două bare metalice de cîte **3** m fiecare se taie în bucăți de cîte **6** cm.
Cîte tăieturi se vor efectua?

604. La un concurs, doi forestieri trebuiau să taie cîte un buștean de aceleași dimensiuni în **13** bucăți. Știind că primul concurent a tăiat bușteanul în **108** secunde, iar cel de-al doilea a avut nevoie de **8** secunde pentru fiecare tăietură, aflați care concurent a cîștigat întrecerea.

605. Dan vrea să repare lanțul lui Grivei. Știind că lanțul era rupt în 6 bucăți, între care 3 erau mai mici, adică una cu 7 zale și două cu cîte 4 zale, aflați numărul minim de tăieturi și lipituri ale zalelor existente ce trebuie realizate, pentru ca lanțul să fie reparat.

606. Aceeași problemă de mai sus cu modificările: „Dan vrea să repare lănțișorul de argint al Simonei, iar două bucăți aveau cîte 5 zale".

607. Este posibil să punem 3 bile în două cutii încît fiecare cutie să conțină cel mult o bilă? Dar dacă avem **n** cutii și **n + 1** bile?

608. Este posibil să punem 15 bile în 5 cutii astfel încît în fiecare cutie să fie cel puțin o bilă și să nu existe două cutii cu acleași număr de bile? Dar 9 bile în 4 cutii? Dar 7 bile în 3 cutii?

609. În 11 cutii sînt 109 bile de cinci culori diferite. Știind că fiecare cutie conține bile de toate culorile, arătați că există două cutii cu același număr de bile.

610. Într-o cutie sînt batiste de trei culori diferite. Care este numărul minim de batiste pe care trebuie să le scoatem din cutie, fără a le privi, pentru a fi siguri că am scos cel puțin două batiste de aceeași culoare?

611. Într-o cutie sînt bile de 5 culori diferite, de aceeași mărime, astfel: 2 verzi, 28 roșii, 28 albastre, 26 galbene și 16 negre.
Care este cel mai mic număr de bile ce trebuie scoase din cutie, fără a le privi, astfel încît să fim siguri că am scos cel puțin 9 de aceeași culoare?

612. Într-o cutie sînt 3 bomboane galbene, 4 bomboane albe și 5 bomboane roșii. Cîte bomboane trebuie să ia Rada din cutie, fără să se uite, pentru a fi sigură că are o bomboană roșie?

613. Într-un sertar sînt 5 cămăși albe și 5 cămăși de alte culori. Cîte cămăși trebuie să scoată George din acel sertar, fără să le privească, pentru a fi sigur că a scos o cămașă albă?

614. Cîți ciorapi trebuie să luăm din cele 3 perechi de ciorapi diferite, aflate într-o pungă, pentru a fi siguri că am luat o pereche?

615. La un aprozar s-au adus 25 lăzi cu mere de trei calități. În fiecare ladă sînt numai mere de aceeași calitate. Arătați că sînt cel puțin 9 lăzi în care să fie mere de aceeași calitate.

616. Este posibil ca din cei 25 de elevi ai clasei noastre să fie cel puțin 3 elevi care își serbează ziua de naștere în aceeași lună dintr-un an?

617. În clasele a IV-a A și a IV-a B sînt în total 53 elevi. Să se arate că cel puțin 2 dintre acești elevi au ziua de naștere în aceeași săptămînă.

618. În școala noastră sînt 30 de clase cu un total de 815 elevi.
Arătați că există cel puțin o clasă cu cel puțin 28 de elevi.

619. La un concurs de matematică 14 elevi au reprezentat școala noastră. Dintre ei, 11 elevi au rezolvat prima problemă, 10 elevi au rezolvat problema a doua, iar 9 au rezolvat problema a treia. Să se arate că cel puțin un elev al școlii noastre a rezolvat toate cele 3 probleme ale concursului.

620. Să se arate că dintre 3 numere naturale oarecare, se pot găsi două a căror diferență să se împartă exact la 2.
621. Într-o încăpere se află 7 persoane. Fiecare dă mîna cu toți ceilalți. Cîte strîngeri de mînă au loc? Generalizați!
622. La o întîlnire prietenească au participat un număr de persoane, fiecare salutîndu-se cu toți prin strîngeri de mînă.
Știind că au avut loc 105 strîngeri de mînă, aflați cîte persoane au participat la acea întîlnire.
623. În „World Cup '94" cele 24 de echipe participante au fost organizate în 6 grupe. Cîte meciuri au avut loc în fiecare grupă? Dar în toate cele 6 grupe?
624. În campionatul de fotbal, divizia A, joacă 18 echipe. Cîte meciuri se joacă într-un campionat tur-retur?
625. 6 prieteni au hotărît să facă schimb de fotografii așa încît fiecare să primească fotografiile tuturor celorlalți. Cîte fotografii au fost necesare? Generalizați!
626. Arătați că oricare ar fi numărul elevilor din enunțul problemei anterioare, numărul total de poze este par.
627. La sfîrșitul anului școlar, fiecare dintre elevii unei clase a primit cîte o fotografie de la fiecare dintre colegii săi. În total au fost schimbate 380 de fotografii. Cîți elevi erau în acea clasă?
628. O familie compusă din 3 persoane se așază la masă, căutînd, de fiecare dată, să existe cel puțin o schimbare de locuri față de modul de așezare de la mesele precedente. Cîte asemenea schimbări pot avea loc? Dar dacă ar fi 5 persoane?
629. Fie cifrele 3, 4, 5 și 6. Cîte numere distincte de 4 cifre se pot forma cu ele?
630. Cîte cifre diferite de zero am combinat dacă am obținut numărul maxim de 6 numere distincte scrise cu numărul maxim de cifre? Dar dacă am obținut 720 astfel de numere?
631. Care sînt cifrele distincte de zero pe care le-am combinat dacă am obținut numărul maxim de 5 040 numere distincte, toate scrise cu numărul maxim de cifre?
632. Cîte numere de 3 cifre se pot scrie folosind cifrele 0, 8 și 9?
633. Cîte numere de forma $\overline{ab3d}$ sînt?
634. Cîte pagini are o carte, dacă la numerotarea lor s-au folosit 3 517 cifre?
635. Cîte cifre sînt necesare pentru a numerota paginile unei cărți care are 1056 pagini?
636. S-au cumpărat truse de creioane și pixuri, plătindu-se în total 9 176 lei. Știind că o trusă a costat 680 lei, iar un pix 1 784 lei, aflați cîte truse și cîte pixuri au fost cumpărate.
637. Cum puteți schimba o bancnotă de 1 000 lei în bancnote de 200 lei, monede de 50 lei și monede de 20 lei, avînd în total 23 asemenea semne bănești?

638. **26** monede de **3** lei, **5** lei și **10** lei valorează **109** lei. Cîte monede de fiecare fel sînt?

639. În trei pușculițe se află o sumă de **900** lei. Suma din prima pușculiță este compusă din atîtea monede de **100** lei de cîte ori în pușculița a doua sînt monede de **20** lei. Dacă am transforma banii din prima pușculiță în monede de **5** lei am obține tot atîtea monede cîte sînt de **3** lei în a treia pușculiță. Ce sumă se află în fiecare pușculiță?

640. Bunica avea într-un coș de **2** ori mai multe mere decît nuci. A dat nepoților cîte **2** mere și **7** nuci, rămînîndu-i în coș **42** mere și **3** nuci. La cîți nepoți a împărțit bunica mere și nuci?

641. (d) Alex, Bogdan și Cristian se întrec în rezolvarea problemelor. Pun într-un săculeț, pe rînd, cîte **3** probleme, una dificilă, una medie și una ușoară, fiecare problemă fiind cotată (notată) cu un număr de puncte, în funcție de gradul ei de dificultate. În fiecare joc, fiecare trage cîte o problemă dintre cele trei și o rezolvă. După un număr de jocuri, Alex a primit **16** puncte, iar Bogdan și Cristian au primit împreună **17** puncte. Cîte jocuri s-au realizat și cu cîte puncte a fost cotat fiecare fel de problemă?

642. Aveți la dispoziție un vas de **4** litri și un vas de **9** litri. Cum puteți măsura de la robinet **6** litri de apă cu cele două vase?

643. Un cioban vrea să împartă în două părți egale laptele dintr-un bidon plin, de **8** l, avînd la dispoziție un bidon de **5** l și unul de **3** l. Cum procedează?

644. Asemănătoare cu problema anterioară, cerința fiind să separe numai **1** l lapte.

645. Cum puteți împărți cei **10** l de apă dintr-o canistră cu o asemenea capacitate (volum) în două părți egale, avînd la dispoziție alte două vase de **3** l și de **7** l?

646. Aveți la dispoziție un vas de **10** litri și un altul de **6** litri. Cum puteți măsura de la robinet **8** litri de apă?

647. Aveți **7** kg de făină. Separați din această cantitate **3** kg de făină, folosind o singură dată o balanță cu talere (nu un cîntar) și o greutate de **1** kg.

648. Este posibil ca, folosind o balanță numai de **2** ori și o masă (piatră) marcată de **100** g, să se separe **675** g din **3** kg de ipsos?

649. **11** elevi din clasa a IV treceau pe lîngă un cîntar cu basculă. Dan s-a repezit să se cîntărească, dar a rămas dezamăgit cînd a aflat că la acel cîntar acul indicator nu se mișcă decît la corpuri cu masa mai mare de **200** kg. Cum a procedat Dan, folosind cîntarul, ca să afle cîte kg are?

650. Cum puteți separa **2** kg de zahăr dintr-o cantitate de **9** kg, avînd la dispoziție numai o balanță, o greutate marcată de **250** grame și realizînd cel mult trei cîntăriri?

651. Aveți **9** monede, dintre care una este falsă, adică este făcută dintr-un material mai ușor. Identificați această monedă, folosind o balanță de cel mult două ori.

652. Din 26 de mingi de tenis, una este mai grea. Cum o identificați avînd la dispoziție o balanță pe care o puteți folosi de cel mult trei ori?

653. Trei băieți aveau mere: primul avea 5 mere, al doilea 4, iar al treilea 3. Ei au mîncat aceste mere împreună cu un prieten care le-a dat în schimb trei nuci. Cei trei au împărțit nucile potrivit cu numărul merelor pe care i le-au dat prietenului. Cîte nuci a luat fiecare băiat?

654. Doi oameni călătoreau împreună. Unul avea 2 pîini, iar altul 3 pîini. Pe drum au întîlnit pe un al treilea călător flămînd. După ce toți trei s-au ospătat împreună în mod egal, al treilea călător le-a dat celorlalți doi 5 lei și a plecat. Cum și-au împărțit primii doi această sumă?

655. Trei frați doreau să-și împartă 41 de nuci, astfel încît primul să ia o jumătate, al doilea a treia parte, iar al treilea a șaptea parte din total, dar nu reușeau. Un prieten de-al lor, care mai avea o nucă, a reușit să le facă această împărțire, iar la urmă și-a mîncat nuca sa. Cum a procedat?

656. Oana vrea să împartă cele 10 mere pe care le are, cu cei doi frați ai săi, astfel încît fiecare băiat să primească cîte un sfert din numărul total, iar ei să îi rămînă a treia parte din același număr. Cîte mere a mai avut Veronica, sora lor, pe care le-a luat în calcul la împărțirea efectuată, astfel încît fiecare a primit un număr întreg de mere, potrivit dorinței Oanei, iar la urmă ea și-a luat merele sale?

657. Pentru colecția de cereale a clasei noastre, Alex a adus o plantă numită porumb. În vederea procurării cartonului pe care o va fixa pentru păstrare, el a măsurat planta și a observat că spicul va ocupa 27 cm din lungimea cartonului, rădăcina cît spicul și un sfert din rădăcină, iar tulpina cît spicul, rădăcina și o jumătate din tulpină. Puteți stabili lungimea minima a cartonului necesar?

658. În sala de spectacole a școlii noastre, primul rînd are 9 locuri, iar fiecare dintre celelalte rînduri are cu 2 locuri mai mult decît precedentul. Dacă s-ar mai adăuga încă un astfel de rînd în spatele sălii, în total ar fi 128 de locuri. Cîte rînduri are sala?

659. Împărțiți în 3 grupe în așa fel încît în fiecare grupă să fie același număr de borcane și aceeași cantitate, fără a trece lichidul dintr-un borcan în altul, cele:

a) 12 borcane de aceeași capacitate (volum), dacă sînt 4 pline, 4 umplute pe jumătate și 4 goale;

b) 21 de borcane de aceeași capacitate (volum), dacă sînt 7 pline, 7 umplute pe jumătate și 7 goale.

660. Într-un joc „de-a isteții”, Dan, conducătorul jocului, a arătat celor trei concurenți, Andreea, Vlad și Sandu, 3 fesuri roșii și 2 fesuri albe. După aceea i-a legat la ochi, a pus fiecăruia pe cap cîte un fes roșu, iar pe celelalte albe le-a ascuns. După ce au fost dezlegați la ochi și, fiind întrebați despre culoarea fesului pe care îl are fiecare, cei doi băieți, Sandu și Vlad,

nu au putut răspunde. Deşi stăteau faţă în faţă, Andreea a răspuns că are fes roşu. Cum a gîndit?

661. Într-o lună oarecare de 30 de zile dintr-un an, trei zile de sîmbătă sînt datate în calendar cu 3 numere impare. Ce zi a săptămînii a fost pe 26 ale lunii respective?

662. Un om a cumpărat 30 de păsări cu 30 de monede; pentru 5 potîrnichi a plătit 3 monede, pentru un porumbel 2 monede, iar pentru fiecare pereche de vrăbii cîte o monedă. Cîte păsări de fiecare fel a cumpărat acel om?

663. Trei copii au cumpărat cîte o cantitate de mere mai mică de 10 kg, de două calităţi: de 320 lei/kg şi de 400 lei/kg. În drum spre casă, îşi dau seama că fiecare a cheltuit atîţia bani ca şi cînd ar fi cumpărat aceeaşi cantitate de mere numai cu 340 lei/kg. Cîte kg de mere din fiecare fel a cumpărat fiecare dintre cei trei copii?

664. La marginea unui lac se află un număr de raţe: unele stau într-un picior, unele în două picioare, iar altele stau jos, numărîndu-se astfel 21 de picioare. Ştiind că numărul raţelor care stau într-un picior este cu 3 mai mare decît al celor ce stau jos, dar cu 3 mai mic decît numărul raţelor ce stau în două picioare, aflaţi cîte raţe erau pe malul lacului.

665. Mama avea 27 ani cînd i s-a născut fiica şi 30 ani cînd i s-a născut fiul. Cîţi ani are acum fiecare dintre ei, dacă peste 2 ani toţi împreună vor avea 60 ani?

666. O fată afirmă că are de 5 ori mai mulţi fraţi decît surori. Un frate al fetei afirmă că are de 2 ori mai puţine surori decît fraţi. Cîţi copii sînt în acea familie?

667. În faţa unui bloc se joacă 10 copii. Cîte fete şi cîţi băieţi sînt, dacă fiecare fată are 2 fraţi şi numai 2 fete sînt surori?

668. Din numărul de ani pe care i-a trăit, un om a copilărit $\frac{1}{13}$ şi încă 2 ani, perioada şcolarizării a durat $\frac{1}{7}$ din anii rămaşi şi încă 6 ani. A lucrat la o societate comercială $\frac{2}{9}$ din numărul anilor ce îi mai rămăseseră şi încă 14 ani, iar ca cercetător într-un institut ştiinţific $\frac{1}{4}$ din restul anilor de viaţă şi încă 3 ani. Beneficiază de pensie cu 15 ani mai mult decît $\frac{1}{6}$ din numărul anilor rămaşi pînă la sfîrşitul vieţii. Cîţi ani a trăit acel om şi cîţi ani reprezintă fiecare perioadă a vieţii?

669. Un pescar, mare glumeţ,
Vru s-arate că-i isteţ,
Cifrele le răsucea
Şi pe loc el prezicea

Cîţi peşti prinzi tu, frăţioare,
Dacă nu ai nadă mare:
Şase fără cap ar fi,
La nouă coad-ar lipsi,
Iar opt ar fi pe jumătate.
Spune, cîţi ar fi, măi frate!

670. Dan cu 5 lei mai mult are
Decît fratele cel mare.
Dacă fratele i-ar da
Un leu, atunci Dan ar avea
O sumă cu ... mai mare
Decît fratele cel mare.
Socotiţi şi completaţi,
Puncte goale nu lăsaţi!

671. Aflîndu-mă la-ai mei bunici,
Am vrut să mănînc nişte nuci,
Dar pe nucul din grădină
A bătut multă grindină.
De aceea nuci nu sînt
Nici pe crengi, nici pe pămînt.
C-un băţ crengile lovesc
Şi pe jos eu nuci găsesc.
Spune tu, dac-ai aflat,
Un miracol s-a-ntîmplat?

672. Un stol de porumbei se-ntorcea spre casă
Şi-o parte dintre ei pe-acoperiş s-aşezasă.
Cealaltă parte găsi mai cu cale
Să-şi caute odihna în copacul cel mare.
Dar prea-i mare-nghesuială
Şi-au căzut la învoială:
Şapte plus cinci de pe casă
Au plecat pe rînd la masă.
Ajută-mă să dezleg,
Căci tu ştii, numai să vrei:
Cîţi au fost la început,
Dacă acum sînt porumbei,
Pe casă sau în copac,
Cît-un sfert din stolu-ntreg.
(În loc de „sau" de-aş pune „şi",
Ştii ce calcul ar ieşi?).

673. (d) Cînd Anton era tot atît de tînăr ca Ion,
Avea tot atîţia ani bătrînul Miron

Cît au acum Ion împreună cu Anton.
Cîţi ani avea Anton
Cînd bătrînul Miron
Era de vîrsta ce-o are Anton?
(De nu ai aflat nimic,
Ia exemplu numeric!)

674. (d) În şcoala noastră sînt clase
Unele chiar numeroase.
Deşi avem numai ciclul primar,
Un număr de clase, a fost necesar,
Să aibă elevi cîte treizeci şi cinci,
Cu trei mai puţine decît cele de-aici
Au cîte treizeci şi doi de şcolari,
Iar altele, e drept, mai rar,
Au chiar cîte treizeci de şcolari.
În total, în **15** grupe,
Sînt şcolari exact cinci sute.
Cîte clase de fiecare fel
Sînt în şcoală, Viorel?

675. Croitoru, Zidaru şi Lăcătuşu sînt numele de familie a trei muncitori, dar Croitoru nu este de profesie croitor, Zidaru nu este zidar, iar Lăcătuşu nu este nici lăcătuş, nici zidar. Arătaţi care muncitor este de profesie croitor, care este zidar şi care este lăcătuş.

676. Dumitru, Vasile şi Marin sînt prenumele a trei elevi. Numele lor de familie sînt tot Dumitru, Vasile şi Marin, dar astfel încît nici unul dintre ei nu are numele la fel ca prenumele. Dacă pe Vasile nu îl cheamă Marin, să se afle numele şi prenumele fiecăruia dintre cei trei elevi.

677. Pentru cumpărarea unui obiect, patru elevi au contribuit cu sume de bani diferite. Aflaţi suma dată de fiecare, dacă toate propoziţiile sînt adevărate:
p_1: Primul a dat **2 600** lei, sau **2 300** lei, sau **2 100** lei;
p_2: Al doilea a dat **1 210** lei sau **2 100** lei;
p_3: Al treilea nu a dat **2 300** lei;
p_4: Al patrulea a dat **1 210** lei.

678. Pînă la anunţarea clasamentului oficial al unui concurs de atletism, într-un grup de cinci tineri părerile erau foarte controversate, fiecare afirmînd:
primul tînăr: Bogdan a sosit primul, iar Alex al doilea;
al doilea tînăr: Emil a sosit al treilea, Iar Dany al patrulea;
al treilea tînăr: Dany a fost al treilea, iar Cristi al patrulea;
al patrulea tînăr: primul a fost Dany, iar ultimul, Emil;
al cincilea tînăr: primul a fost Alex, iar Bogdan, ultimul.
Ştiind că fiecare dintre cei cinci tineri a enunţat corect numai locul ocupat de un singur concurent, dar a apreciat greşit locul ocupat de celălalt

concurent, arătați ordinea sosirii celor cinci atleți: Alex, Bogdan, Cristi, Dany și Emil.

679. Stabiliți ordinea a cinci case de culori diferite care sînt dispuse în șir, dacă:
1) prima casă este galbenă;
2) casa albă nu este vecină cu casa din mijloc, dar este vecină cu casa neagră;
3) casa roșie nu este vecină cu casa verde, dar este vecină cu casa neagră.

680. Cinci case, A, B, C, D și E, sînt dispuse în șir, la distanțe egale una de alta. Arătați care este ordinea acestora, dacă:
1) în mijloc nu este casa C;
2) atunci cînd privim casa A, în stînga avem casa D;
3) distanța de la casa C la casa E este egală cu distanța de la casa C la casa D.

681. Ana spune că Barbu minte, iar acesta spune că Dan minte. Dan spune că Ana sau Barbu minte.
Știți cine spune adevărul și cine minte?

682. Andrei întreabă pe Barbu:
– Pe cine reprezintă această fotografie?
Barbu răspunde:
– Tatăl celui din fotografie este unicul fiu al celui cu care stai acum de vorbă.
Cine era în fotografie?

683. „În acest tablou nu este figura fratelui meu, nu este nici figura surorii mele și totuși este figura unuia dintre copiii părinților mei."
A cui este figura din tablou?

684. Două vecine vînd în piață cîte **210** mere pe zi. Una vinde **7** mere la **50** lei, iar cealaltă, care are mere mai mari, le vinde **3** la **50** lei.
Într-o zi, prima femeie, avînd altă treabă, a rugat-o pe a doua să-i vîndă și ei merele la prețul din ziua precedentă. Vecina s-a învoit, gîndindu-se că nu-i va fi greu: va face grămezi de cîte **10** mere, adică **3** de la ea și **7** de la vecina, și le va vinde cu **100** lei grămada, căci **50+50=100** lei; deci un măr la **10** lei. Zis și făcut. După vînzare, vrînd să-i dea vecinei partea cerută din bani, constată că ea pierde foarte mult. Vecina, înțelegătoare, împarte paguba pe din două. Care a fost cauza pagubei și ce sumă a încasat pînă la urmă fiecare femeie pentru vînzarea din acea zi?

685. Cînd ne deplasăm mai repede? Mergînd distanța ***d*** cu bicicleta sau parcurgînd jumătate din acea distanță cu o mașină care se deplasează de **4** ori mai repede decît bicicleta, iar a doua jumătate pe jos, mergînd de **2** ori mai încet decît cu bicicleta? Particularizați!

686. Dacă din suma a **13** numere naturale distincte nenule scădem **1**, obținem suma altor **12** numere naturale distincte nenule ce au media aritmetică **7**. Aflați, de fiecare dată, care sînt acele numere.

687. Scrieţi şirul de greutăţi (piese) pentru cîntar, cu care să se poată măsura (cîntări) orice masă (greutate) de pînă la **1 023** g. Se cere ca şirul să conţină cît mai puţine greutăţi.

688. Descoperiţi regula care:

a) s-a aplicat coloanelor pentru a obţine rezultatele din ultima linie şi apoi continuaţi:

1	2	5	14	3
18	6	1	3	7
19	10	26	199	?

b) a stat la baza compunerii şirului de numere:

7 12 10 15 13 18 16;

c) s-a aplicat numerelor din primul şir, de fiecare dată, pentru a obţine numerele din al doilea şir:

1) 3 1 5 7
13 5 29 53

2) 3 2 38 11
1 0 6 3.

689. Pe baza relaţiei dintre cifra unităţilor şi cifra sutelor din diferenţa unui număr de trei cifre distincte şi răsturnatul său, scrieţi toate aceste diferenţe.

690. <u>Curiozităţi aritmetice</u>

a) Numărul **100** se poate obţine în cel puţin **9** moduri pe baza operaţiilor aritmetice învăţate şi a cifrelor de la **1** la **9**, fără a le schimba ordinea. Cum?

b) Ca la punctul a), obţinei numărul **1**, la nevoie folosind şi paranteze, cînd aveţi:

1) primele **3** cifre; 2) primele **4** cifre; 3) primele **5** cifre; 4) primele **6** cifre; 5) primele **7** cifre; 6) primele **8** cifre; 7) primele **9** cifre.

c) Verificaţi egalităţile:

$2 \times 2 = 2 + 2$;; $\quad 1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$;

$2 \times \frac{1}{2} = 2 - 1$; $\quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$;

$11 \times 1{,}1 = 11 + 1{,}1$; $\quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

d) Găsiți pătratele ($a \cdot a$) unor numere naturale consecutive a căror sumă să fie **365** dacă:
1) sînt două numere;
2) sînt trei numere.
e) Piramide numerice
(culese de elevii P.B., P.C., H.C., C.V., după I.I.Perelman)
Continuați piramidele următoare:

e) 1)

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$ ș.a.m.d. pînă la

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

e) 2)

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$ ș.a.m.d. pînă la

$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

e) 3)

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$ ș.a.m.d. pînă la

$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

f) 1) Continuați, apoi verificați:

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 18 = 222222222$$
$$12345679 \times 27 = 333333333$$ ș.a.m.d. pînă la

$$12345679 \times 81 = 999999999$$

f) 2) Verificați:

$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

f) 3) Explicați, apoi continuați oral:

$573 \times 999 = (573-1) \times 1000 + \overline{(9-5)(9-7)(9-2)}$
$947 \times 999 =$
$999 \times 981 =$
$509 \times 999 =$

f) 4) Explicați, apoi continuați oral:

$95 \times 95 = \overline{..25} = 9025$
↑
$9 \times 10 = 90$ sau
$9 \times 9 + 9 = 90$

$15 \times 15 =$	$65 \times 65 =$
$25 \times 25 =$	$75 \times 75 =$
$35 \times 35 =$	$85 \times 85 =$
$45 \times 45 =$	$105 \times 105 =$
$55 \times 55 =$	$905 \times 905 =$

f) 5) Calculați oral produsul 96×98, în cel puțin 5 moduri.

691. Completați pătratele cu cifre de la 1 la 9, dacă:
a) folosiți toate cifrele (o singură dată), iar suma magică este 15;
b) folosiți numerele pare, iar suma magică este 20.

692. (d) Rebus aritmetic
Ghicește cuvîntul format din 10 litere distincte, știind că, dacă le numerotezi cu cifre de la 1 la 9, ultima cifră cu zero, poți obține:

a) împărțirea:
```
nîmare : ilţ = nrî
îlîn
=ţîrr
 ţaur
 =îuae
    ilţ
   =ţlm
```

b) împărțirea:
```
jdjătci : ru = jedju
ru
=drä
 dăo
 =uot
   ută
   =jjc
     ru
     udi
     joe
     =ea
```

693. (d) Ghiciți cuvîntul ale cărui litere au fost numerotate cu cifre de la **1** la **9**, ultima cu **0**; cifrele au fost înlocuite cu literele corespunzătoare, obținîndu-se înmulțirea:

```
      o r n e m ·              d c t a u ·
      d c t a u         sau    o r n e m
   ------------             -----------
      * * * * *                * * * * *
    * * * * * *              * * * * *
  * * * * * 0              * * * * *
  * * * * *              * * * * *
* * * * *                -----------------
-----------------        * * * * * * * 1 *
* * * * * * * * 0
```

Puteți reconstitui apoi înmulțirea?

694. Reconstituiți împărțirea:

```
* * * * * * * : * * = * * 8 * *
* * *
-------
= = = * *
      * *
    -------
    = * * *
      * * *
    -------
      = = 1
```

695. Reconstituiți înmulțirea:

```
    ABC x
    BAC
   -----
   ****
   **A
 ***B
 ------
 ******
```

696. <u>Observații</u>

Alături de modurile prin care efectuăm astăzi proba (verificarea) operațiilor, în trecut se foloseau și alte metode, ca de exemplu „metoda lui **9**", „metoda lui **7**", „metoda lui **11**" etc. (A se vedea I.I. Perelman în <u>Aritmetica distractivă</u>, 1963).

Calculați, apoi verificați (efectuați proba) prin aplicarea „regulii lui **9**":

a) 23 567 + 1 689 + 115 406 =

b) 176 391 − 85 297 =

c) 9 084 × 308 =

d) 34 462 : 807 =

697. Calculaţi oral, pe baza împărţirii şi a înmulţirii cu **2**:

a. $8 \cdot 134 =$ d. $9 \times 23 =$

b. $64 \cdot 72 =$ e. $17 \times 13 =$

c. $16 \cdot 1234 =$ f. $29 \times 21 =$

698. După ce calculaţi exerciţiile de mai jos, enunţaţi o problemă de calcul mintal rapid pentru asemenea operaţii:

a. $984 \times 1001 =$ b. $73 \times 10101 =$

$1001 \times 736 =$ $10101 \times 87 =$

$1001 \times 903 =$ $10101 \times 93 =$

699. Pe baza regulii aplicate la exerciţiul anterior, efectuaţi:

a) $\overline{abcabc} : 1001 =$ b) $\overline{ababab} : 10101 =$

$\overline{xyzxyz} : 1001 =$ $\overline{xyxyxy} : 10101 =$

700. La ora de educaţie fizică, elevii clasei noastre erau împărţiţi în **10** grupe egale ca număr. Pentru organizarea unui joc, ei au fost redispuşi în **5** rînduri, în fiecare rînd, începînd cu primul şi terminînd cu al cincilea, numărul elevilor fiind reprezentat de numere naturale consecutive. Cînd s-a trecut la lucrul pe ateliere, la primul atelier a trecut rîndul cu cel mai mare număr impar de elevi, la al doilea, rîndurile care aveau la un loc cel mai mare număr par de elevi, iar la al treilea, restul adică rîndul cu **5** elevi.

Puteţi afla cîţi elevi sînt în clasa noastră?

701. a) Numiţi **7** zile la rînd, fără să spuneţi data sau numele lor!

b) În ce zi a săptămînii ne aflăm, dacă azi putem spune: „Cînd alaltăieri era mîine, azi era tot atît de departe de sîmbătă, la fel cum va fi azi departe de sîmbătă atunci cînd poimîine va fi ieri”?

702. (d) În curtea lui moş Andrei
Sînt vaci, găini, raţe şi purcei.
Numărîndu-le pe toate
Găseşte **46** de capete.
Cîte sînt de fiecare,
Dacă au **112** picioare,
Raţele sînt jumătate
Din găinile surate,
Însă vacile sînt, cert,
Din numărul de porci, un sfert.

IV. Soluții și răspunsuri

Problemele de mai jos presupun noțiunea de interval: dacă anumite obiecte (arbori, stîlpi etc.) sînt dispuse în mod regulat pe o linie, distanța care desparte două obiecte se numește interval.

Dacă înmulțim lungimea unui interval cu numărul intervalelor obținem lungimea totală a liniei.

Dacă trebuie să determinăm numărul obiectelor, distingem mai multe situații:

a) obiectele sînt așezate pe o linie închisă;

b) obiectele sînt așezate pe o linie deschisă și la fiecare capăt punem cîte un obiect;

c) obiectele sînt așezate pe o linie deschisă, dar la capete nu punem obiecte;

d) obiectele sînt așezate pe o linie deschisă, dar punem un obiect la unul dintre capete.

596. Realizați un desen și veți deduce că pe acea linie închisă (cazul **a**) s-au plantat atîția pomi cîte intervale de **3** m sînt. Deci: Care este perimetrul figurii dreptunghiulare? $(12+9)\cdot 2=42$ (m).
Cîte intervale de **3** m se pot obține din linia închisă de **42** m (cîți pomi s-au plantat)? $42 : 3=14$ (pomi).

597. Pătratul (o linie închisă) cu latura de **7** m are perimetrul $4\times 7=28$ m. Dacă pe această linie sînt **14** stîlpi, (numărul de intervale), distanța dintre primii **2** stîlpi este de **2** m, căci $28 : 14=2$.

598. Șoseaua (o linie deschisă) are **5** km = **5 000** m (cazul b). Dacă distanța dintre **2** stîlpi (un interval) este de **50** m, iar la capetele liniei s-au pus stîlpi, rezultă că numărul stîlpilor este egal cu numărul intervalelor plus 1, adică: $5\,000 : 50+1=101$ (stîlpi).
Deci: Cîte intervale de **50** m sînt în **5 000** m? $5\,000 : 50=100$ (intervale). Cîți stîlpi sînt? La **100** adăugăm și stîlpul care marchează începutul șoselei, adică $100+1=101$ (stîlpi).

599. Linia deschisă pe care se plantează un rînd de pomi este de $95-2-2=$ $=91$ (m).
Cîte intervale de **7** m se pot forma din **91** m? $91 : 7=13$ (intervale).
Cîți pomi sînt plantați pe un rînd? $13+1=14$ (pomi).
Cîți pomi sînt în acea livadă? $14\times 15=210$ (pomi).

600. Linia este deschisă. Cîți pomi sînt pe o parte a bulevardului? $202 : 2=101$ (pomi). Cîte intervale (egale) sînt între **101** pomi? Deoarece numărul de pomi de pe o linie deschisă este egal cu numărul de intervale plus **1**, rezultă

că numărul de intervale de pe **1 000** m este de **100**, căci **101 − 1 = 100**. Ce distanță este între **2** pomi alăturați? **1 000 : 100 = 10** (m).

601. Linia gardului are pe capete cîte un stîlp (cazul c). Deci numărul de stîlpi necesari va fi egal cu numărul intervalelor minus 1 (pe capete nu mai punem stîlpi noi).
Cîte intervale de **2** m sînt în **14** m? **14 : 2 = 7** (intervale).
Cîți stîlpi noi sînt necesari? **7 − 1 = 6** (stîlpi noi).

602. Care este perimetrul dreptunghiului? **672 : 4 = 168** (m).
Care este semiperimetrul? **168 : 2 = 84** (m).
Cîți m are lățimea? **(84 − 72 : 4) : 2 = 33** (m).
Cîte intervale de **3** m se pot forma din **33** m? **33 : 3 = 11** (intervale).
Cîți stîlpi sînt necesari pe o lățime? (numărăm și stîlpul din capătul lățimii; într-o variantă, putem să nu luăm în calcul stîlpii de la cele două capete ale fiecărei lățimi) **11 + 1 = 12** (stîlpi).
Cîți stîlpi sînt pe **2** lățimi? **2 × 12 = 24** (stîlpi).

603. Cîte intervale (bucăți de **6** cm) se obțin dintr-o singură bară?
300 : 6 = 50 (bucăți, intervale).
Cîte tăieturi se fac pentru a obține **50** bucăți? (Este cazul **c**; diferența dintre cazul **a** și cazul **c** este de **2** obiecte, tăieturi).
Deci: Nr. de intervale minus 1, căci la ultima tăietură se obțin **2** bucăți (intervale), adică **50 − 1 = 49** (tăieturi).
Cîte tăieturi se fac pentru ambele bare? **2 × 49 = 98** (tăieturi).

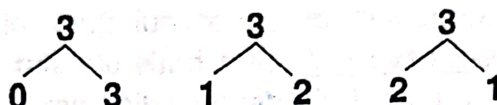
604. Cîte tăieturi se fac pentru **13** bucăți? Vor fi **12** tăieturi căci la ultima tăietură se obțin **2** bucăți, adică: **13 − 1 = 12** (tăieturi).
Dacă pentru **12** tăieturi primul muncitor are nevoie de **108** secunde, pentru o singură tăietură sînt necesare **108 : 12 = 9** secunde.
Deoarece **8 < 9**, rezultă că al doilea forestier a cîștigat întrecerea.
sau:
De cîte secunde a avut nevoie al doilea muncitor pentru a realiza **12** tăieturi? Dacă pentru o tăietură a avut nevoie de **8** secunde, pentru **12** tăieturi (adică **13** intervale minus **1**) a avut nevoie de **12** ori mai mult decît **8**, adică **12 × 8 = 96** (secunde).
Deoarece **96 < 108**, rezultă că al doilea forestier a cîștigat întrecerea.

605. Dacă Dan ar desface cîte o za la unul dintre capetele celor **5** bucăți (dintre cele **6**), ar realiza **5** tăieturi (și **5** lipituri).
Realizați un desen! Pentru a obține însă unirea celor **6** bucăți printr-un număr minim de tăieturi, Dan poate să desfacă cele **4** zale dintr-o singură bucată mică și să folosească fiecare za pentru a uni capetele a două bucăți, realizînd astfel numai **4** tăieturi (două capete rămîn libere).

606. Deoarece un lănțișor de argint este purtat la gît, el este considerat ca fiind reparat dacă și capetele terminale sînt unite (se obține un oval).
Într-o variantă, trebuie să desfacă cîte o za la capătul fiecărei bucăți pentru

a obţine un oval (cerc), deci ar realiza **6** tăieturi (şi lipituri).
Dacă ar tăia cele **5** zale din bucata astfel existentă, ar putea folosi fiecare za pentru a obţine lănţişorul în formă de oval.

607. În asemenea probleme putem aplica „principiul cutiei" (principiul lui Dirichlet), care poate fi formulat (pe înţelesul tuturor) astfel: dacă avem **2** cutii în care trebuie să distribuim **3** obiecte, adică **2+1**, atunci într-o cutie vom distribui cel puţin **2** obiecte;
sau: dacă avem **n** cutii în care trebuie să distribuim **n+1** obiecte, atunci cel puţin într-o cutie vom pune cel puţin **2** obiecte.
Dacă nu ajungem la o asemenea generalizare, cum gîndim?
Descompunem numărul **3** într-o sumă de **2** termeni, în toate posibilităţile:



Se observă că nu este posibil ca fiecare cutie să conţină cel mult o bilă (căci dacă într-o cutie punem o bilă sau nu punem nici una, cealaltă cutie va conţine **2** sau, respectiv, **3** bile. Deci cel puţin o cutie va conţine cel puţin **2** bile.

608. Descompunem numărul **15** în **5** numere distincte, diferite de **0**. Este posibil? Da, căci $1+2+3+4+5=15$. Sau: Punem cîte o bilă în fiecare cutie, iar restul de **10** îl descompunem în **4** numere distincte pe care apoi le distribuim în fiecare cutie, începînd cu a doua, adică:
$1+(1+1)+(1+2)+(1+3)+(1+4)=1+2+3+4+5=15$.
Dacă avem **9** bile în **4** cutii, nu este posibil să nu existe două cutii cu acelaşi număr de bile, căci $1+2+3+4=10$, iar $9<10$.
Deci $1+2+3+3=9$. Dacă avem **7** bile şi **3** cutii, este posibil, căci $7=1+2+4$.

609. Dacă în fiecare cutie sînt bile de toate culorile, rezultă că în fiecare sînt cel puţin **5** bile.
Dacă trebuie să demonstrăm că sînt **2** cutii cu acelaşi număr de bile, presupunem că nu sînt **2** asemenea cutii, adică toate cele **11** cutii conţin număr diferit de bile. În această ipoteză, cel mai mic număr total de bile ar fi **110**, căci $\underbrace{5+6+7+\ldots+15}_{11 \text{ (cutii)}}=110$
În problemă însă numărul total de bile din cele **11** cutii este **109**, cu **1** mai puţin decît **110**, deci presupunerea noastră este falsă (absurdă). Pot fi: **2** cutii cu cîte **14** bile, iar celelalte **9** vor avea $5+6+7+\ldots+12+13=81$; sau **2** cutii cu cîte **5** bile, iar celelalte **9** cutii vor avea $7+8+9+10+11+12+13+14+15=99$ etc.; pot fi mai multe cutii cu acelaşi număr de bile: **2** cu cîte **6**, **2** cu cîte **11**, **2** cu cîte **12**, iar celelalte **5** cutii vor avea $5+9+10+13+14=51$ bile etc.

610. Rezolvarea 1
Dacă scoatem **2** batiste, nu este posibil să fie ambele de aceeași culoare? Este posibil, dar nu avem siguranța (certitudinea) că sînt de aceeași culoare, deoarece este posibil și ca o batistă să aibă o culoare, iar cealaltă, altă culoare.
Dacă scoatem **3** batiste? Este posibil ca toate să aibă aceeași culoare, sau **2** de o culoare, una de altă culoare, sau toate cele **3** să fie de culori diferite.
Deci nici acum nu avem siguranța că am scos **2** batiste de aceeași culoare.
Dacă scoatem **4** batiste? Dacă am scos **3** batiste de culori diferite (situația cea mai nefavorabilă), cînd mai scoatem încă o batistă, cu certitudine ea va avea culoarea uneia dintre batistele deja scoase.
Răspuns: Numărul minim este **4** batiste.
Rezolvarea 2
Urmînd „principiul cutiei", putem atribui cîte o cutie fiecărei culori (în minte).
În cazul cel mai nefavorabil, cînd batistele sînt amestecate, este posibil să scoatem **3** batiste de culori diferite, adică am scos cîte o batistă din fiecare cutie. Cînd mai scoatem o batistă (indiferent de cutia luată în considerare), cu certitudine vom avea scoase cel puțin **2** batiste de aceeași culoare.

611. Sigur că s-ar putea ca, din întîmplare, să scoatem chiar **9** bile de aceeași culoare, luînd numai **9** bile. Datorită însă cerinței de certitudine, trebuie să luăm în considerare situația cea mai nefavorabilă, cînd am scos cele **2** bile verzi și cîte **8** din celelalte, adică $2+4\times8=34$ bile, dar tot nu putem fi siguri că avem cel puțin **9** bile de aceeași culoare.
Cîte bile am scos pentru a îndeplini obligația de certitudine? $34+1=35$ bile.

612. Trebuie să luăm în considerare și situația cea mai nefavorabilă, cînd Rada a luat cele **3** bomboane galbene și cele **4** bomboane albe, dar tot nu a luat o bomboană roșie. Dacă mai ia o bomboană, cu siguranță aceea va fi roșie, căci toate celelalte $3+4=7$ au fost luate.
Răspuns: $7+1=8$ (bomboane).

613. În situația cea mai nefavorabilă, George a putut scoate **5** cămăși de alte culori, fără să aibă o cămașă de culoare albă. Dacă mai scoate una, cu siguranță ea va avea culoarea albă, celelalte fiind toate scoase din sertar.
Răspuns: $5+1=6$ (cămăși).

614. Pentru a forma o pereche ne trebuie **2** ciorapi de același fel din cei $3\times2=6$ ciorapi. Putem scoate $1+1$ sau $1+1+1$ ciorapi fără a avea siguranța că **2** sînt de același fel. Atunci cînd mai scoatem încă unul, este cert că putem forma o pereche cu un ciorap din cei **3** deja scoși.
Răspuns: **4** ciorapi, în care avem cel puțin o pereche.

615. Dacă cele **25** de lăzi au mere de trei calități, rezultă că le putem grupa în **3** categorii. Dacă fiecare grupă ar avea **9** lădițe, în total ar fi $3\times9=27$ lădițe, deci prea multe lădițe. Dacă fiecare grupă ar avea cîte **8** lădițe, în total ar fi $3\times8=24$ lădițe, deci ar mai trebui să existe încă una; vor fi **2** grupe de cîte **8** lădițe și una cu cîte **9** lăzi. Acesta este cazul cel mai nefavorabil,

căci pot fi şi alte soluţii: $11+7+7=10+8+7=12+11+2$ etc., în care avem mai mult de 9 lădiţe cu mere de aceeaşi calitate, ba chiar 2 grupe de lădiţe cu mai mult de 9 lădiţe fiecare.

Deci:

1) Cîte lădiţe ar fi în total, în situaţia în care presupunem că nu sînt 9 asemenea lăzi, ci mai puţine cu 1 în fiecare grupă?

$(9-1)\times 3=8\times 3=24$ (lădiţe).

2) Pentru ca în total să fie 25 de lăzi este necesar ca măcar (cel puţin) 9 lăzi să aibă mere de aceeaşi calitate, căci

$2\times 8+9=16+9=25$ (lăzi), adică $8+8+9=25$.

616. Rezolvarea 1

Presupunem că nu există 3 astfel de elevi, ci cel mult 2. Dacă în fiecare lună a anului îşi vor sărbători ziua de naştere 2 elevi, atunci în cele 12 luni ale anului îşi vor sărbători ziua $12\times 2=24$ elevi. În clasă sînt însă 25 elevi, deci cel de-al 25-lea elev îşi va sărbători ziua de naştere împreună cu alţi doi elevi.

Rezolvarea 2

Este posibil să folosim principiul lui Dirichlet: fixăm cutiile ca fiind cele 12 luni ale anului, iar obiectele, cei 25 elevi.

În cazul cel mai nefavorabil, cînd avem cîte $3-1=2$ elevi în fiecare lună (cutie), în total ar fi $12\times 2=24$ elevi. Al 25-lea elev urmează să fie „distribuit" în una din lunile anului şi astfel există o lună (o cutie) în care îşi vor sărbători ziua de naştere cel puţin 3 elevi, căci $12\times 2+1=25$.

617. Cîte săptămîni are un an? 52 de săptămîni. Presupunem că nu există 2 asemenea elevi, ci numai cîte un elev care îşi serbează ziua de naştere într-o săptămînă.

Cîte săptămîni ar fi necesare? $53\times 1=53$ (de săptămîni).

Rezultă că presupunerea făcută este falsă, căci anul are 52 săptămîni, nu 53, deci cel puţin 2 elevi au ziua de naştere în aceeaşi săptămînă.

618. Presupunem că nu există vreo clasă cu 28 elevi, ci fiecare are cel mult 27 elevi. Cîţi elevi ar fi în total? $30\times 27=810$ (elevi). Cu cîţi elevi ar fi mai puţin? $815-810=5$ (elevi). Deci cei 5 elevi trebuie să fie „distribuiţi" în alte clase, obţinînd astfel cel puţin o clasă cu cel puţin 28 elevi.

619. Presupunem că nici un elev nu a rezolvat toate cel 3 probleme, deci fiecare a rezolvat cel mult două. Dacă fiecare reprezentant al şcolii noastre a rezolvat cîte 2, atunci cei 14 elevi au rezolvat în total $14\times 2=28$ de probleme, cu 2 mai puţine decît $11+10+9=30$, cîte probleme au fost rezolvate de cei 14 elevi. Rezultă că cel puţin un elev a rezolvat toate cele 3 probleme (În cazul în care toţi ceilalţi $14-2=12$ elevi au rezolvat cîte 2 probleme, 2 elevi au rezolvat cîte 3 probleme etc.)

620. Oricum am lua 3 numere naturale, în mod obligatoriu cel puţin două dintre ele sînt de aceeaşi paritate (sînt ambele pare sau ambele impare). Diferenţa

dintre 2 numere pare sau dintre 2 numere impare este tot un număr par, deci diferența se împarte exact la 2.

621. Rezolvarea 1

Primul dă mîna cu următorii 6, deci au loc 6 strîngeri de mînă. Al doilea dă mîna cu următorii 5 (cu primul deja a dat, adică strîngerea de mînă cu prima persoană a fost deja numărată). Al treilea dă mîna cu următorii 4, al patrulea dă mîna cu următorii 3, al cincilea dă mîna cu următorii 2, iar al șaselea dă mîna cu al șaptelea (cu toți ceilalți a dat mîna, dar strîngerile de mînă au fost numărate la cei din față).

În total au fost $6+5+4+3+2+1=21$ strîngeri de mînă.

În general: Dacă sînt n persoane, ele realizează $(n-1)+(n-2)+(n-3)+$ $+\ \dots\ +1=k$ strîngeri de mînă.

Rezolvarea 2

Numărăm cîte strîngeri de mînă realizează fiecare din cele 7 persoane. Fiecare dă mîna cu 6 persoane (nu dă mîna cu sine). În total ar fi $7\cdot6=42$ de strîngeri de mînă. Astfel am numărat fiecare strîngere de mînă de 2 ori (primul cu al doilea sau al doilea cu primul realizează o singură strîngere de mînă etc.).

În total au fost $42:2=21$ strîngeri de mînă.

Generalizare: Dacă sînt n persoane, fiecare realizează $n-1$ strîngeri de mînă, iar în total au loc $n(n-1):2$ strîngeri de mînă.

622. Dacă au fost n persoane, iar fiecare a realizat $n-1$ strîngeri de mînă, în total ar fi fost $n\cdot(n-1)$ strîngeri de mînă, dar astfel am numărat fiecare strîngere de mînă de 2 ori. Atunci au fost $n(n-1):2$ strîngeri de mînă. Rezultă $n(n-1):2=105 \Rightarrow n(n-1)=210 \Rightarrow n(n-1)=3\cdot5\cdot2\cdot7$. Deoarece n și $n-1$ sînt 2 numere consecutive, grupăm factorii pentru a obține astfel de numere, adică $n(n-1)=14\cdot15 \Rightarrow n=15$.

Sau: Pentru n persoane, numărul strîngerilor de mînă a fost: $1+2+3+\ \dots\ +n-1=105 \Rightarrow (1+n-1)\cdot(n-1):2=105$. (A se vedea regula de calcul rapid de la I.10. din volumul 1).

Atunci $n(n-1)=210 \Rightarrow n=15$.

623. Cîte echipe sînt într-o grupă? $24:6=4$ (echipe).

Cîte meciuri vor avea loc în fiecare grupă? Dacă fiecare echipă joacă cu celelalte 3, atunci cele 4 echipe vor juca $4\times3:2=6$ meciuri; sau $3+2+$ $+1=6$ meciuri.

Cîte meciuri sînt în toate cele 6 grupe? $6\times6=36$ meciuri.

624. Precizări de vocabular:

Turul unui campionat cuprinde meciurile fiecărei echipe pe care le joacă pe teren propriu (acasă). Cum la un meci iau parte două echipe, într-o etapă sînt 9 meciuri, adică $18:2=9$.

În returul unui campionat, echipele care au jucat în tur în deplasare joacă pe teren propriu.

Rezolvarea 1
Dacă sînt 18 echipe, iar în tur fiecare echipă joacă 17 jocuri (nu joacă cu ea însăși), în total ar fi $18(18-1)=306$ meciuri. Dar astfel am numărat fiecare meci din tur de 2 ori (de exemplu: meciul dintre formațiile A și B a fost numărat o dată pentru A, a doua oară pentru B).
Cîte meciuri s-au jucat în tur? $306 : 2=153$.
Cîte meciuri s-au jucat în tur-retur? $153+153=306$ (meciuri).
Rezolvarea 2
Pentru 18 echipe, numărul total de meciuri jucate în tur este: $17+16+$ $+15+ \dots +2+1=(1+17)\cdot 17 : 2=153$.
În campionatul tur-retur s-au jucat $2\times 153=306$ (meciuri).
Rezolvarea 3
Dacă sînt 18 echipe, pentru ca o echipă să joace acasă la ea cu toate celelalte echipe, într-o etapă vor avea loc 9 meciuri, adică $18 : 2=9$.
Cîte meciuri vor avea loc în 17 etape? $17\times 9=153$ (meciuri).
Cîte meciuri vor avea loc în campionatul tur-retur? $2\times 153=306$ (meciuri) sau $2\times 17\times 9=306$ (meciuri).

625. Fiecare dintre cei 6 prieteni trimite 5 poze, cu una mai puțin decît numărul de prieteni (nu-și trimite sieși).
Deci vor fi $6\cdot 5=30$ fotografii schimbate.
În general: dacă sînt n persoane, fiecare trimite $n-1$ fotografii; în total vor fi necesare $n\cdot(n-1)$ fotografii.

626. Deoarece numărul total de poze este egal cu $n\cdot(n-1)$, în care factorii sînt numere consecutive, cu certitudine produsul este număr par.

627. Fie n numărul elevilor. Fiecare elev primește $n-1$ fotografii (nu-și trimite sieși). Dacă sînt n elevi și fiecare a primit cîte $n-1$ fotografii, înseamnă că s-au schimbat în total $n\cdot(n-1)$ fotografii. Deci $n\cdot(n-1)=380$. Deoarece $380=2\cdot 10\cdot 19=20\cdot 19$, rezultă $n=20$. În acea clasă erau 20 de elevi.

628. Rezolvarea 1
Fie cele 3 persoane a, b și, respectiv, c. Schemele de așezare pot fi:
1) a; b; c; 2) a; c; b; 3) b; a; c; 4) b; c; a; 5) c; a; b; 6) c; b; a.
Răspuns: 6 schimbări.
Rezolvarea 2
De fapt, problema cere aflarea numărului de permutări ce se pot obține cu această mulțime compusă din 3 persoane.
Ce este o permutare? Este o schimbare sau o modificare care se realizează în modul de aranjare a unei mulțimi ordonate păstrînd de fiecare dată numărul total de elemente. Modificarea poate să privească 2 sau mai multe (chiar toate) elemente(le). Numărul permutărilor se notează P_n și este egal cu n factorial, adică $n!$; $n!$ este egal cu produsul tuturor numerelor consecutive de la n pînă la 1, adică $P_3=3!=3\cdot 2\cdot 1=6$; $P_5=5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=$ $=120$.

629. Fiind 4 cifre, se pot obține $P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (numere).
Verificați, încercînd să obțineți cele 24 de numere prin combinarea celor 4 cifre.

630. a) Deoarece $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, rezultă că am combinat 3 cifre.
b) Deoarece $720 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, rezultă că am combinat 6 cifre (diferite de zero).

631. Numărul 5 040 nu depinde de cifrele pe care le-am combinat, ci de numărul acestor cifre. Deoarece $5\,040 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, rezultă că sînt 7 cifre. Care sînt aceste 7 cifre? Sînt grupe de cîte 7 dintre cifrele de la 1 la 9, adică: de la 1 la 7; de la 2 la 8; de la 3 la 9 sau 1; 3; 4; 5; 6; 7; 8 etc.

632. Numerele sînt de forma $\overline{abc}$. Cifra *a* poate lua 2 valori: 8 și 9; cifra *b* poate lua 3 valori: 0; 8; 9; cifra *c* poate lua 3 valori. Numerele vor fi: 809; 890, 908; 980. Sunt 4 numere.

633. Rezolvarea 1
Cifra *a* poate lua 9 valori: de la 1 la 9; cifrele *b* și *d* pot lua 10 valori: de la 0 la 9; în total vor fi $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ numere.
Rezolvarea 2
Cel mai mic număr de forma $\overline{abcd}$ este 1 000, iar cel mai mare 9 999. Cîte numere cu cifra zecilor 3 sînt? De la 1 000 la 1 100 sînt 10 numere de forma $\overline{ab3d}$, iar de la 1 000 la 2 000 sînt $10 \cdot 10 = 100$ asemenea numere.
Atunci de la 1 000 la 9 999 sînt $9 \cdot 100 = 900$ numere de forma $\overline{ab3d}$.
Rezolvarea 3
Cîte numere consecutive sînt de la 1 000 la 9 999?
$9\,999 - 999 = 9\,000$ (numere).
Cîte numere de la 1 000 la 1 099 nu sînt de forma $\overline{ab3d}$? $100 - 10 = 90$.
Rezultă că de la 1 000 la 1 999 sînt $10 \cdot 90 = 900$ asemenea numere, iar de la 1 000 la 9 999 sînt $9 \cdot 900 = 8\,100$ asemenea numere (care nu sînt de forma $\overline{ab3d}$). Atunci $9\,000 - 8\,100 = 900$ numere sînt de forma $\overline{ab3d}$.

634. Cîte pagini sînt numerotate cu numere de o cifră? Primele 9 pagini.
Cîte cifre s-au folosit pentru aceste pagini? $9 \times 1 = 9$ (cifre)
Cîte pagini sînt numerotate cu numere de 2 cifre? $99 - 9 = 90$ (pagini).
Cîte cifre s-au folosit pentru paginile de la 10 la 99? $90 \times 2 = 180$ (cifre).
Cîte cifre s-au folosit pentru paginile numerotate cu 3 cifre?
$(999 - 99) \times 3 = 2\,700$ (cifre).
Cîte cifre sînt pe primele 999 de pagini? $9 + 180 + 2\,700 = 2\,889$ (cifre).
Cîte cifre sînt folosite pentru paginile următoare (numerotate cu 4 cifre)?
$3\,517 - 2\,889 = 628$ (cifre).
Cîte pagini sînt numerotate cu numere de 4 cifre? $628 : 4 = 157$ (pagini).
Cîte pagini are cartea? $999 + 157 = 1\,156$ (pagini).

635. Cîte cifre se folosesc pe primele 9 pagini? $9 \times 1 = 9$ (cifre).
Cîte cifre se folosesc pentru numerotarea paginilor cu numere de 2 cifre?

$(99-9)\cdot 2=180$ (cifre). Cîte cifre se folosesc pentru numerotarea paginilor cu numere de 3 cifre? $[999-(9+90)]\cdot 3=900\cdot 3=2\ 700$ (cifre).
Cîte cifre se folosesc pentru numerotarea paginilor de la 1 000 la 1 056? $(1\ 056-999)\cdot 4=57\cdot 4=228$ (cifre).
Cîte cifre sînt necesare în total? $9+180+2\ 700+228=3\ 117$ (cifre).

636. Observație: A se vedea și problemele IX.38 și VI.2 din volumul 1. Putem concepe un tabel ca la problema de mai sus. Ecuația obținută la Rezolvarea 2 (de mai jos) se mai numește ecuație diofantină (după numele matematicianului Diofante din Alexandria, sec.III).

Rezolvarea 1

Se observă că toate trusele au costat o sumă care se termină în zero, căci și prețul unitar se termină în zero. Atunci $9\ 176-\overline{...0}=\overline{...6}$, deci $1\ 784\cdot a=$ $=\overline{...6}$. Care număr înmulțit cu 1 784 (adică $\overline{...4}$) dă un produs terminat în 6, produs mai mic decît 9 000? Este numărul 4, căci $1\ 784\times 4=7\ 136$. Deci s-au cumpărat 4 pixuri și 3 truse de creioane, căci $(9\ 176-7\ 136):$ $:680=2\ 040:680=3$.

Rezolvarea 2

Notăm cu x numărul de truse și cu y numărul de pixuri. Din enunț, rezultă $680x+1\ 784y=9\ 176/:8\Rightarrow 85x+223y=1\ 147\Rightarrow\ x=(1\ 147-223y):$ $:85\Rightarrow 223y\leq 1\ 147\Rightarrow y\leq 5$. Se observă că $1\ 147-223y$ se împarte exact la 5, adică se termină în 5 sau în 0. Rezultă $3y=\overline{...7}$ sau $3y=\overline{...2}$.
Deoarece $y\leq 5$, rezultă $3y=\overline{...2}$, iar $y=4$.
Atunci $x=(1\ 147-223\cdot 4)::85\Rightarrow x=3$.

637. Notăm cu x numărul de bancnote, cu y numărul monedelor de 50 lei, iar cu z numărul monedelor de 20 lei. Rezultă:
1) $x+y+z=23$, iar $20x+50y+20z=1000$;
2) $x, y, z\in N^*$;
3) deoarece sînt 23 de monede și bancnote, iar valoarea totală este de numai 1 000 lei, rezultă că trebuie să fie mai multe monede cu valoare mică, deci $x<y<z$;
4) deoarece $1\times 50+1\times 20<100$, $1\times 50+2\times 20<100$, iar $1\times 50+3\times$ $\times 20>100$, rezultă că $50y=\overline{..00}$, iar $20z=\overline{..00}$, adică y este număr par, iar z este un multiplu de 5, mai mic decît 25 (numărul total este de 23);
5) deoarece $200x+50y+20z=1000\Rightarrow x\leq 4$, $50y\leq 700\Leftrightarrow y\leq 14$.
a) dacă $x=1$, iar $z=5$, rezultă $y=23-6\Rightarrow y=17$ (fals, nu este par);
dacă $x=1$, iar $z=10$, rezultă $y=23-11\Rightarrow y=12$, iar $200\times 1+12\times 50+$ $+10\times 20=1\ 000$; dacă $x=1$, iar $z=15$, rezultă $y=7$ (fals);
dacă $x=1$, iar $z=20$, rezultă $y=23-21\Rightarrow y=2$, dar $200\times 1+2\times 50+20\times$ $\times 20<1\ 000$.
b) dacă $x=2$, iar $z=5$, rezultă $y=16$, dar $2\times 200+16\times 50+5\times$ $\times 200>1\ 000$;

dacă $x=2$, iar $z=10$, rezultă $y=11$ (fals);
dacă $x=2$, iar $z=15$, rezultă $y=6$, iar $2\times200+6\times50+15\times20=1\ 000$;
dacă $x=2$, iar $z=20$, rezultă $y=1$ (fals).
Valorile 3 și 4 pentru x nu convin.

Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile de mai sus. Obținem:
$200x+50y+20z=1\ 000\ / : 10 \Rightarrow 20x+5y+2z=100$, iar $x+y+z=23$, de unde avem $z=23-x-y$, iar $20x+5y+2(23-x-y)=100 \Rightarrow 18x+3y=$ $=54 \Rightarrow 6x+y=18$. Deoarece $y\neq0$, rezultă $6x<18 \Rightarrow x<3$. Deoarece $6x$ și 18 sînt numere pare, rezultă y este număr par.
Dacă $x=1$, rezultă $y=12$, iar $z=10$.
Dacă $x=2$, rezultă $y=6$, iar $z=15$.

638. Rezolvarea 1

Notăm cu x numărul monedelor de 3 lei, cu y numărul celor de 5 lei, iar numărul monedelor de 10 lei cu z. Rezultă:
1) $x+y+z=26$, iar $x, y, z \in N^*$;
2) $3x+5y+10z=109$;
3) deoarece $10\times10+1\times3+1\times5=108$, rezultă $z<10$;
atunci $x+y>26-10 \Rightarrow x+y>16$;
4) deoarece $x+y\geq17$, iar $17\times3=51$, rezultă $10z\leq109-51 \Rightarrow z\leq5$;
5) din $5y<90 \Rightarrow y<18$;
6) deoarece $10z=\overline{..0}$, rezultă $3x+5y=\overline{..9}$;
7) din $3x+5y=\overline{..9}$, rezultă:
dacă $5y=\overline{..0} \Rightarrow 3x=\overline{.9} \Rightarrow x=\overline{.3}$; dacă $5y=\overline{..5} \Rightarrow 3x=\overline{.4} \Rightarrow x=\overline{.8}$.
Verifică numai $z\in\{1,3\}$, căci $1\times10+13\cdot3+[26-(13+1)]\cdot15=109$;
$3\times10+18\cdot3+(26-21)\cdot5=109$.

Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile de mai sus. Obținem:
$3x+5y+10z=109$, iar $x+y+z=26 \Rightarrow x=26-y-z$. Prima egalitate devine: $3\cdot(26-y-z)+5y+10z=109 \Rightarrow 2y+7z=31$. Deoarece 31 este număr impar, iar $2y$ este un număr par, rezultă că z este un număr impar.
Deoarece $7z<31$, rezultă $z<4 \Rightarrow z\in\{1,3\}$.
Dacă $z=1$, atunci $2y=31-7 \Rightarrow y=12$, iar $x=13$;
dacă $z=3$, atunci $2y=31-21 \Rightarrow y=5$, iar $x=18$.

639. Notăm cu x, y și, respectiv, cu z numărul monedelor care se află în pușculițe. Din enunț rezultă $x=y$, iar $100x+20x+3z=900$ și $100x : 5=z \Rightarrow$ $100x=5z$. Atunci $x=5$, $z=100$, iar $y=5$. Sau:
Dacă $100x : 5=z \Rightarrow 100x=5z\ / : 5 \Rightarrow 20x=z$. Înlocuim totul prin z în sumă și obținem: $5z+z+3z=900 \Rightarrow z=100$; $x=100 : 20 \Rightarrow x=5$; $y=5$.
Verificare: $5\times100+5\times20+100\times3=900$; $5=5$;
$5\times100 : 5=100$; $100=100$.

640. A se vedea și problema IX.27 din volumul 1.
Dacă în distribuirea fructelor, bunica respecta raportul inițial dintre numerele celor două feluri de fructe, atunci:
1) Cîte mere trebuia să primească fiecare copil la **7** nuci? $7 \times 2 = 14$ (mere).
2) Cîte mere trebuia să rămînă la grupul de **3** nuci? $2 \times 3 = 6$ (mere).
3) Cu cîte mere au rămas mai mult? $42 - 6 = 36$ (mere). De unde provine această diferență? Din faptul că fiecare nepot a primit cîte **2** mere, nu **14**.
4) Cu cîte mere a primit mai puțin fiecare nepot? $14 - 2 = 12$.
5) Cîți nepoți au primit fructe de la bunica (De la cîți nepoți se adună diferența de **36** mere)? Dacă de la un nepot au rămas **12** mere, atunci diferența de **36** s-a acumulat de la atîția nepoți de cîte ori **12** se cuprinde în **36**, adică $36 : 12 = 3$ (nepoți).

641. Deoarece în fiecare joc sînt numai 3 tipuri de probleme (una dificilă, una medie, una ușoară), rezultă că, pentru fiecare joc, cei trei primesc la un loc același punctaj (***p***). Dacă înmulțim acest punctaj cu numărul de jocuri (***n***), obținem $16 + 17 = 33$ puncte, adică $n \cdot p = 33 \Rightarrow 3 \times 11 = 33$. Care dintre factorii **3** și **11** reprezintă numărul de jocuri și care reprezintă punctajul obținut la un loc de cei trei copii într-un singur joc? Deoarece fiecare problemă este cotată cu cel puțin **1** punct, iar $1 + 2 + 3 > 3$, rezultă că au fost **3** jocuri, iar punctajul obținut de cei trei după un singur joc este **11**. Notînd cu d, m și, respectiv, cu u punctajul pentru fiecare tip de problemă, putem scrie: $d + m + u = 11$, în care $d > m > u$, iar $u \geq 1$. Rezultă $d \leq 11 - 2 - 1 \Rightarrow d \leq 8$.
Ținînd cont și de faptul că Alex, după **3** jocuri, a obținut **16** puncte, iar ultimii doi copii au primit împreună **17** puncte, putem concepe un tabel:

Nr.joc	Total	Punctajul pentru:		
		Alex	Bogdan	Cristian
1)	**11** =	**6** +	**4** +	**1**
2)	**11** =	**6** +	**4** +	**1**
3)	**11** =	**4** +	**6** +	**1**

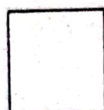
Total **33** = **16** + (**14** + **3**) ⇒
33 = **16** + **17**.

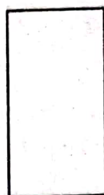
Răspuns: **3** jocuri, iar punctajul pentru fiecare problemă a fost respectiv: **6**; **4**; **1**.
Mai sînt și alte soluții? De ce? (Cînd explicați, aveți în vedere faptul că din trei probleme distincte se pot obține **11** puncte și deci, pentru a obține **16** puncte, din **3** jocuri, Alex a rezolvat **2** probleme de aceeași dificultate).

642. Procedăm astfel:
1) umplem vasul de **9** l;

2) luăm de 2 ori din el cîte 4 l, separînd astfel 1 l, căci $9-2\times4=1$;
3) turnăm acest litru de apă în vasul de 4 l (care a fost golit);
4) umplem vasul de 9 l, din care umplem vasul de 4 l; în vasul de 4 l mai încap 3 l, căci $1+3=4$, iar în vasul de 9 l rămîn 6 l, căci $9-3=6$. Sau:

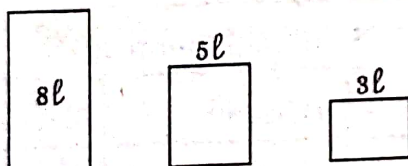
A=4l B=9l





1) Umplem de 3 ori vasul A, deşertîndu-l în B, obţinînd:
3 l 9 l
2) Răsturnăm vasul B şi turnăm cei 3 litri din A în B, rezultînd:
0 l 3 l
3) Umplem de 2 ori vasul A, deşertîndu-l în B, în care încap acum numai $9-3=6$ l; în A rămîn 2 l, căci $2\times4-6=2$ litri, adică:
2 l 9 l
4) Răsturnăm vasul B, obţinînd:
2 l 0 l
5) Turnăm cei 2 litri din A în B, adică:
0 l 2 l
6) Umplem vasul A şi îl deşertăm în B, obţinînd astfel în B cei 6 l, adică:
0 l 6 l

643. Fie vasele următoare:

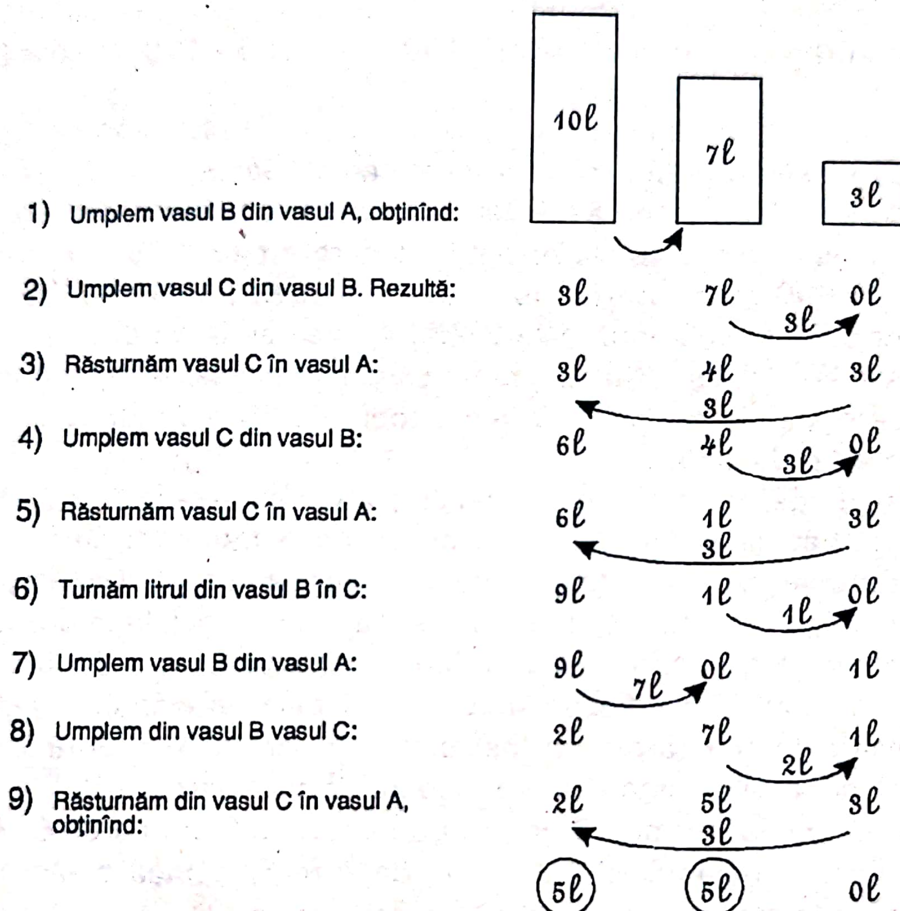


1) 8l → 5l (5l) — Rămîn: 3l 5l 0l
2) 5l → 3l (3l) — Rămîn: 3l 2l 3l
3) 3l → 8l (3l) — Vor fi: 6l 2l 0l
4) 5l → 3l (2l) — Vor fi: 6l 0l 2l
5) 8l → 5l (5l) — Vor fi: 1l 5l 2l
6) 5l → 3l (1l) — Rămîn: 1l 4l 3l
7) 3l → 8l (3l) — 4l 4l 0l

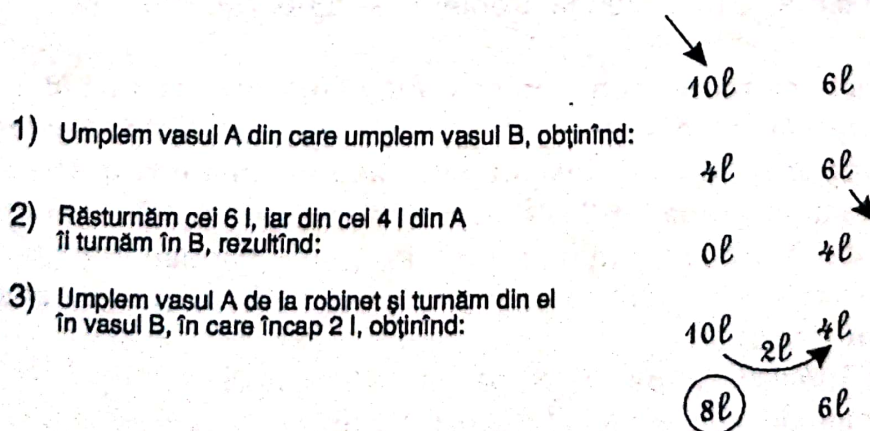
Adică: 1) Umple vasul de **5** l din care, apoi, umple vasul de **3**l; 2) Toarnă cei **3** l din vasul mai mic în vasul mai mare în care vor fi **6** l; 3) răstoarnă cei **3** l din vasul de **5** l în vasul de **3** l; 4) din vasul de **8** l (acum are **6** l) umple vasul de **5** l; 5) toarnă din vasul de **5** l un litru în vasul mic unde se obţin **3** l; în vasul mijlociu rămîn **4** l, iar în celelalte **1** l şi **3** l, adică **4** l.

644. Pe baza desenului anterior, ne oprim după operaţia nr.**5**.

645. Fie vasele A, B şi C (vezi figura).



646. Fie vasele A şi B.



647. Punem pe un taler greutatea de 1 kg și împărțim cantitatea de făină pe cele două talere, obținînd echilibrul acesteia. Pe talerul cu greutatea vor fi 3 kg de făină, iar pe celălalt 4 kg.

648. Se pune pe un taler masa de 100 g. Apoi se împart pe cele două talere cele 3 kg de ipsos, astfel ca balanța să fie în echilibru. Pe un taler vor fi (100 g + 3 000 g) : 2 = 1 550 g de ipsos, iar pe celălalt, care are piatra, 1 450 g de ipsos. Se dau deoparte cele 1 550 g de ipsos de pe taler. Ca balanța să fie în echilibru, se mută ipsos de pe un taler pe celălalt. Talerul cu masa de 100 g va conține (1 450 + 100) : 2 − 100 = 775 − 100 = 675 g de ipsos.

649. S-au urcat mai mulți elevi pe cîntar, astfel încît au depășit 200 kg. Ultimul s-a urcat Dan. Diferența dintre cantitatea indicată înainte și cea pe care a indicat-o cîntarul după urcarea lui Dan reprezintă tocmai cît cîntărește el.

650. Prin două folosiri succesive ale balanței, separăm cîte 2,250 kg de zahăr (prima dată 4 500 g). La a treia folosire a balanței, punem pe un taler și greutatea de 250 grame lîngă cele 2,250 kg de zahăr. În acest moment, balanța se va dezechilibra. Ca să o readucem în echilibru, dăm deoparte de pe talerul care are piatra de 250 grame, tocmai 250 g de zahăr. Pe acest taler, rămîn 2 kg de zahăr.

651. Din cele 9 monede, formați 3 grupe egale ca număr. Așezați pe un taler al balanței o grupă, iar pe celălalt, altă grupă de 3 monede. Dacă balanța indică egalitate, atunci moneda falsă se află în a treia grupă. Dacă nu, opriți cele 3 monede care au cîntărit mai ușor și dați jos pe celelalte de pe taler. Odată descoperită grupa în care se află moneda falsă, la a doua cîntărire așezați cîte o monedă pe fiecare taler. Dacă balanța a indicat egalitate, moneda falsă este cea care nu a fost cîntărită, iar dacă balanța nu era în echilibru, moneda falsă este cea mai ușoară de pe talere.

652. Din cele 26 de mingi, formați 3 grupe: două de cîte 9 și una de 8. Așezați pe cîte un taler al balanței cîte o grupă de 9 mingi. Dacă balanța indică egalitate, mingea mai grea este în grupa de 8 mingi. Dacă nu, luați grupa de 9, care cîntărește mai mult, și o împărțiți în alte 3 grupe de cîte 3 mingi. Prin alte două cîntăriri (a se vedea problema anterioară), descoperiți mingea mai grea.

Dacă după prima cîntărire, deduceți că mingea mai grea se află în grupa de 8 mingi, împărțiți această grupă în 2 grupe de cîte 3 și una de 2 mingi. Prin cîntărirea grupelor de cîte 3, descoperim dacă mingea mai grea se află în aceste grupe sau în grupa de 2. Printr-o altă cîntărire a două din grupa de 3 mingi (sau din grupa de 2 mingi), veți descoperi mingea mai grea.

653. Pentru a afla cîte mere a dat fiecare prietenului lor, trebuie să aflăm cîte mere a mîncat fiecare.

Cîte mere au împărțit cei patru? 5 + 4 + 3 = 12 (mere).

Cîte mere a mîncat fiecare băiat? 12 : 4 = 3 (mere).

Cîte mere a dat prietenului lor fiecare dintre cei 3 băieți?

Primul: $5-3=2$ (mere);

al doilea: $4-3=1$ (măr);

al treilea: $3-3=0$ (mere).

Al treilea nu a dat nici un măr, deci nu trebuie să primească nici o nucă. Primii doi împart nucile astfel: cele 3 nuci reprezintă 3 părți; o parte (o nucă) este luată de al doilea; două părți (2 nuci) sînt luate de primul băiat.

654. Cei doi trebuiau să-și împartă suma de 5 lei după cîtă pîine a dat celui de-al treilea.

Cîtă pîine a consumat fiecare? $(2+3) : 3=\frac{5}{3}$ (adică 5 treimi).

Cîte treimi de pîine a avut primul călător? 2×3 treimi $=6$ treimi.

Dar al doilea? 3×3 treimi $=9$ treimi.

Cîte treimi de pîine a dat primul celui de-al treilea călător?

6 treimi $-$ 5 treimi $=1$ treime.

Dar al doilea? 9 treimi $-$ 5 treimi $=4$ treimi.

Cîte treimi de pîine au dat cei doi împreună? 1 treime $+4$ treimi $=5$ treimi (părți).

Dacă pentru cele 5 părți au primit 5 lei, pentru fiecare parte a primit cîte 1 leu. Deci primul trebuie să primească 1 leu, pentru că a dat o parte (o treime), iar al doilea va primi 4 lei, deoarece a dat 4 părți (4 treimi de pîine).

655. Prietenul a pus în grămada de 41 nuci și nuca sa. Primul copil a luat $(41+1) : 2=42 : 2=21$ nuci; al doilea a luat $42 : 3=14$ nuci; al treilea a luat $42 : 7=6$ nuci. Împreună au luat $21+14+6=41$ nuci, iar prietenul și-a luat nuca înapoi. (Cum a fost posibil? Ce parte din total, din întreg, voiau să împartă cei trei frați? $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$. Deci nuca adăugată de către prieten reprezenta $\frac{1}{42}$ din întreg, care oricum rămînea).

656. Cîte părți din total (întreg) voia să împartă Oana? $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{10}{12}$. Cîte părți din întreg rămîneau neîmpărțite? $1-\frac{10}{12}=\frac{2}{12}$. Deci Crina a mai luat în calcul 2 mere, obținînd un total de 12 mere. Fiecare băiat a luat cîte $12 : 4=3$ mere; Oana a luat $12 : 3=4$ mere; în total ei au primit $3+3+4=10$ mere. Crina a mai avut 2 mere, căci $12-10=2$.

657. Pe scurt:

1) spicul → 27 cm;

2) rădăcina → cît spicul plus un sfert din rădăcină;

3) tulpina → cît spicul plus rădăcina plus o jumătate din tulpină.

Din relația 2), rezultă că rădăcina va ocupa 27 de cm plus o lungime egală cu un sfert din rădăcină. Dar orice întreg are 4 sferturi; rezultă că 3 sferturi

din rădăcină reprezintă 27 cm, adică toată rădăcina va ocupa $27 : 3\times4=$ $=36$ cm.
Din relaţia 3), rezultă că tulpina va ocupa 27 cm plus 36 cm plus o lungime egală cu o jumătate din tulpină. Dar orice întreg are 2 jumătăţi; rezultă că o jumătate din lungimea tulpinii reprezintă $27+36=63$ cm, iar toată tulpina va ocupa $2\times63=126$ cm. Lungimea minimă a cartonului necesar va fi: $36+126+27=189$ cm $=1,89$ m.

658. Rezolvarea 1

Cînd numărul total de locuri este mic, un astfel de exerciţiu-problemă este rezolvat prin adunări sau scăderi succesive, astfel:

a) $9+11=20$; $20+13=33$; $33+15=48$; $48+17=65$; $65+19=84$; $84+$ $+21=105$; $105+23=128$; deci numărul total de locuri este 105, fiind 7 rînduri.

sau:

b) $128-9=119$; $119-11=108$; $108-13=95$; $95-15=80$; $80-17=63$; $63-19=44$; $44-21=23$; $23-23=0$; deci rîndul care s-ar adăuga ar avea 23 locuri; acum sînt 7 rînduri, ultimul rînd avînd 21 de locuri.

Rezolvarea 2

Notăm cu n numărul de locuri din ultimul rînd a, care s-ar mai adăuga. Se ştie că dintr-un număr par de numere impare se obţine o sumă pară, iar dintr-un număr impar de numere impare, o sumă impară, adică:

$$\underbrace{9+11+13+\ \dots\ +n}_{a\ \text{termeni}}=128.$$

Care este valoarea lui a (Cîte numere consecutive impare sînt? Sau: cîte rînduri ar avea sala)? Dacă şirul începe şi se termină cu un număr impar, rezultă că, de la 9 la n, jumătate dintre numere sînt pare, iar jumătate plus 1 sînt numere impare. De la 1 la n ar fi n numere consecutive, iar de la 9 la n ar fi $n-8$ numere consecutive.

Cîte numere consecutive impare ar fi, adică $a=?$ Fiind $n-8$ numere consecutive, primul fiind 9, iar ultimul, n, tot un număr impar, vor fi $a=(n-9) : 2+1$ numere consecutive impare (l-am scăzut pe 9, primul număr impar din şir, pentru ca împărţirea să fie exactă, apoi l-am adăugat).

Care ar fi ultimul număr din şir, adică $n=?$ Sau: cîte locuri ar avea ultimul rînd?

$$9+11+13+\dots+n=28 \Rightarrow \underbrace{(9+n)+(11+n-2)+\dots}_{(a:2)\ \text{termeni, căci suma este pară.}}=128$$

Atunci: $a : 2=[(n-9) : 2+1] : 2$, iar $(9+n)[(n-9) : 2+1] : 2=128$.

Rezultă:

$(9+n)(\frac{n-9+2}{2}) : 2=128 \leftrightarrow (9+n)(n-7) : 4=128 \leftrightarrow (9+n)(n-7)=512=2^9$.

Se observă că $(9+n)$ este mai mare decît $(n-7)$ cu $9+7=16$.
Dacă $n-7=16$, rezultă $n=23$, iar $9+n=9+23=2^5$.
Deci $2^5 \cdot 2^4=2^9$, $n=23$, iar $a=(23-9) : 2+1=8$; atunci $a-1=8-1=7$.
Deci sînt 7 rînduri, ultimul rînd avea 21 locuri, în total fiind 105 locuri.

Rezolvarea 3

$9+11+13 \ldots +n=128 \Leftrightarrow$

$9+(9+2\cdot1)+(9+2\cdot2)+ \ldots +[9+2(a-1)]=128 \Leftrightarrow$

$$\underbrace{9+9+9+ \ldots 9}_{a \text{ termeni}} + \underbrace{2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+ \ldots +2(a-1)}_{a-1 \text{ termeni}}=128 \Leftrightarrow$$

$9a+2(1+2+3+ \ldots +a-1)=128 \Leftrightarrow 9a+2[(1+a-1)\cdot(a-1) : 2]=128$.
(Am aplicat regula de calcul rapid la adunarea unor numere consecutive; a se vedea I.10. din volumul 1).
Rezultă: $9a+a(a-1)=128 \Leftrightarrow a(9+a-1)=128 \Leftrightarrow a(8+a)=128=2^7$. Se observă că a este mai mic decît $a+8$ cu $8=2^3$. Atunci $a=2^3$, iar $a+8=2^4$, adică $a=8$, iar $a-1=7$. Deci sînt 7 rînduri cu 105 locuri.

659. a) Dacă împărţim cele 4 borcane pline în 3 părţi, în prima grupă vor fi 2 pline, iar în celelalte cîte unul plin. Cele 4 borcane umplute pe jumătate le împărţim în 2 părţi, în a doua şi în a treia grupă punem cîte 2 asemenea borcane, pentru a obţine cantităţi egale, căci 2 jumătăţi formează un întreg (unul plin).
Mai trebuie să obţinem şi acelaşi număr de borcane.
Punem 2 borcane goale în prima grupă şi cîte un borcan gol în celelalte două grupe. Deci vor fi:
– în grupa I: 2 pline şi 2 goale; total: 4 borcane şi 2 (cantităţi) întregi;
– în grupa a II-a: 1 plin, 2 umplute pe jumătate şi 1 gol; total: 4 borcane şi 2 (cantităţi) întregi;
– în grupa a III-a: 1 plin, 2 umplute pe jumătate şi 1 gol; total: 4 borcane şi 2 (cantităţi) întregi.
b) După un raţionament asemănător, obţineţi:
– în grupa I: 3 pline, 1 umplut pe jumătate, 3 goale; total: 7 borcane şi $3\frac{1}{2}$ întregi;
– în grupa a II-a: 2 pline, 3 umplute pe jumătate, 2 goale; total: 7 borcane şi $3\frac{1}{2}$ cantităţi (întregi);
– în grupa a III-a: 2 pline, 3 umplute pe jumătate, 2 goale; total: 7 borcane şi $3\frac{1}{2}$ cantităţi (întregi).

660. Fiecare dintre cei trei ar fi putut să numească culoarea fesului lor dacă vedeau în fața lor (la ceilalți doi) numai două fesuri albe. Andreea a folosit și răspunsurile celorlalți doi. Ea a gîndit că dacă ar fi avut fes alb, Sandu ar fi văzut un fes alb și unul roșu (la Vlad); în cazul în care și Sandu ar fi avut fes alb, atunci Vlad putea spune că are fes roșu. Ca urmare, Andreea a putut spune că are fes roșu.

661. Se știe că, într-o lună, ziua de sîmbătă cade din 7 în 7 zile. Dacă prima este datată cu număr impar, următoarea va avea o dată-număr par, căci număr impar plus număr impar (7) dă o sumă pară, a treia va fi datată cu un număr impar. Deci zilele de sîmbătă datate cu un număr impar sînt din 14 în 14 zile. Dacă prima zi de sîmbătă este 1 ale lunii, următoarea datată cu număr impar va fi pe 15, căci $1+7+7=15$, iar ultima pe 29, căci $15+7+7=29$. (Dacă prima zi de sîmbătă din lună este pe data de 2, atunci numai pe 9 și pe 23 vor fi zilele de sîmbătă datate cu numere impare; a treia ar fi în luna următoare, căci $23+14>30$.) Deci pe 29 va fi zi de sîmbătă, pe 28 va fi vineri, pe 27 va fi joi, iar pe 26 va fi zi de miercuri.

662. Observații

Din enunț rezultă:

– omul a cumpărat cel puțin cîte o pasăre de fiecare fel (a admite că a cumpărat zero porumbei înseamnă a contrazice logica enunțului);

– numărul potîrnichilor este multiplu de (se împarte exact la) 5 mai mic decît 30 (adică 5; 10; 15; 20; 25, căci un termen este mai mic, în acest caz, decît suma), iar cel al vrăbiilor este un multiplu de 2 (se pot forma perechi);

– o potîrniche a costat $\frac{3}{5}$ de monedă, un porumbel 2 monede, o vrabie $\frac{1}{2}$ de monedă.

Rezolvarea 1

Pe baza observațiilor de mai sus, formăm grupe de păsări.

Cîte păsări ar fi într-o asemenea grupă?

5 (potîrnichi) + 1 (porumbel) + 2 (vrăbii) = 8 (păsări), cu o valoare de $3+2+1=6$ monede.

Cîte grupe de 8 se pot forma din cele 30 de păsări? $30=8\cdot3+6$ (deci rămîn 6 păsări negrupate).

Pînă aici putem spune că sînt:

$3\cdot5=15$ potîrnichi, în valoare de $3\cdot3=9$ monede;

$3\cdot2=6$ vrăbii, în valoare de $3\cdot1=3$ monede;

$3\cdot1=3$ porumbei, în valoare de $3\cdot2=6$ monede.

Cîte monede ar fi costat? $9+3+6=18$ (monede) sau $3\cdot6=18$ (monede).

Cîte păsări ar fi fost? $15+6+3=24$ (păsări).

Pentru că sînt prea puține monede (18 față de 30), considerăm și acele 6 păsări (restul de la împărțirea de mai sus sau $30-24=6$) ca fiind porumbei,

care valorează $6 \times 2 = 12$ monede.
Deci omul a cumpărat:
$3 + 6 = 9$ porumbei în valoare de $9 \cdot 2 = 18$ monede;
15 potîrnichi în valoare de $15 : 5 \times 3 = 9$ monede;
3 perechi (adică 6) vrăbii în valoare de $3 \times 1 = 3$ monede.
În total, a cumpărat $9 + 15 + 6 = 30$ păsări în valoare de $18 + 9 + 3 = 30$ monede.

Rezolvarea 2. Mai multe ipoteze succesive

Sînt mai multe încercări: a) Presupunem că au fost 5 potîrnichi (cu valoare de 3 monede). Restul de $30 - 5 = 25$ păsări au fost porumbei și vrăbii, în valoare totală de $30 - 3 = 27$ monede. Presupunem (din nou) că ar fi fost numai porumbei toate cele 25 de păsări. (Pentru calea parcursă a se vedea problemele de falsă ipoteză din cap.VI, vol.1). Cîte vrăbii ar fi fost? $(25 \times 2 - 27) : (2 - \frac{1}{2}) = \frac{46}{3}$, dar $\frac{46}{3} \notin N$. b) La fel și pentru ipotezele 10 sau 25 de potîrnichi. c) Presupunem că au fost 15 potîrnichi, cu valoare de 9 monede. Restul de $30 - 15 = 15$ păsări au fost porumbei și vrăbii, în valoare totală de $30 - 9 = 21$ monede. Presupunem (din nou) că au fost cumpărați numai porumbei (toate cele 15 păsări rămase după prima ipoteză). Cîte monede ar valora? $15 \times 2 = 30$ (monede). Cu cîte monede ar fi mai multe? $30 - 21 = 9$ (monede). Înlocuim cîte un porumbel din ipoteza noastră cu cîte o vrabie, pînă dispare diferența de 9 monede. Cîte înlocuiri vom face, tot atîtea vrăbii au fost. Care este diferența de preț dintre un porumbel și o vrabie? $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ (monede). Cîte vrăbii au fost? $9 : \frac{3}{2} = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$ (vrăbii). Cîți porumbei au fost? $15 - 6 = 9$ (porumbei). Potîrnichi au fost 15. Sau: Înlocuim cîte 2 porumbei cu cîte o pereche de vrăbii, obținînd: $9 : (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 9 : 3 = 3$ (perechi de vrăbii) etc.

Rezolvarea 3

Notînd cu x numărul potîrnichilor, cu y numărul porumbeilor, cu z numărul de vrăbii, enunțul poate fi redat astfel: $x + y + z = 30$, iar $\frac{3}{5}x + 2y + \frac{1}{2}z = 30$.
Înmulțind cu 2 fiecare membru al celei de-a doua egalități și scăzînd din ceea ce obținem prima egalitate, rezultă: $\frac{1}{5}x + 3y = 30 \Rightarrow y = 10 - \frac{1}{15}x$. Deoarece $y \in N^*$, rezultă x este multiplu de 15 mai mic decît 30, adică $x = 15$, iar $y = 10 - 1 \Leftrightarrow y = 9$; $z = 6$.

Sau:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 30 \;/\cdot 2 \\ \frac{3}{5}x + 2y + \frac{1}{2}z = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{7}{5}x + \frac{3}{2}z = 30 \Rightarrow$$

$z=(30-\frac{7}{5}x)\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow z=20-\frac{14}{15}\cdot x$. Deoarece $x=M_{15}<30$, rezultă: $x=15$, $z=6$, iar $y=9$.

663. Notăm cu x cantitatea cumpărată de primul copil la prețul de **320** lei/kg și cu y cantitatea la prețul de **400** lei/kg. Din enunț, rezultă: $320x+400y=340(x+y)$, unde $x+y<10$. Prin împărțirea la **10** a fiecărui membru din prima egalitate, obținem: $32x+40y=34x+34y$. Prin împărțirea la **2**, apoi scăzînd $(16x+17y)$, egalitatea devine $3y=x$. Dacă $y=1$, atunci $x=3$; dacă $y=2$, atunci $x=6$. Rezultă că fiecare dintre copii putea să cumpere **3** kg de mere de cîte **320** lei și un kg de **400** lei sau **6** kg de cîte **320** lei și **2** kg de cîte **400** lei.

664. Se observă că în numărul de **21** nu sînt incluse și picioarele rațelor care stau jos. Dacă rațele care stau în două picioare sînt cu **3** mai multe decît cele care stau într-un picior, rezultă că $21-3\cdot2=15$ picioare pot fi organizate în **3** părți, fiecare parte fiind egală cu numărul rațelor care stau într-un picior.

Cîte rațe erau într-un picior? $15:3=5$ (rațe).

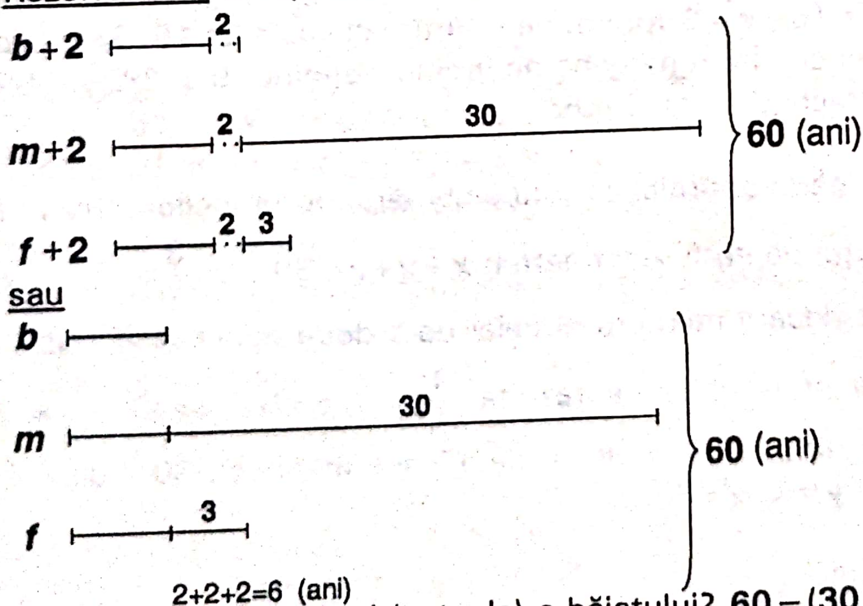
Cîte rațe stăteau în două picioare? $5+3=8$ (rațe) sau $(21-5):2=8$.

Cîte rațe stăteau jos? $4-2=2$ (rațe).

Cîte rațe se află pe malul lacului? $5+8+2=15$ (rațe).

665. Care dintre copii este mai mare, fiul sau fiica? Deoarece mama avea **27** ani cînd s-a născut fiica și **30** ani cînd s-a născut fiul, rezultă că fata s-a născut înaintea băiatului cu **3** ani, căci $30-27=3$. Diferența de vîrstă dintre cei trei rămîne aceeași.

<u>Rezolvarea 1</u> O reprezentare grafică a vîrstelor poate fi:



Care <u>este</u> triplul vîrstei (actuale) a băiatului? $60-(30+3+3\cdot2)=21$ (ani).

Cîți ani are băiatul? $21:3=7$ (ani). Dar fiica? $7+3=10$ (ani). Ce vîrstă are mama? $30+7=37$ sau $27+10=37$ (ani).

Rezolvarea 2

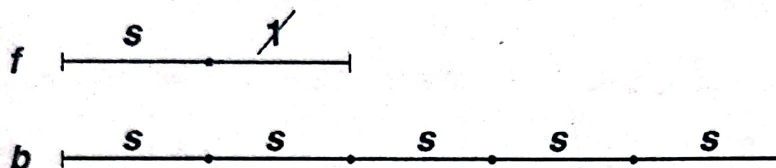
Notăm vîrstele ca mai sus. Din $b+30=m$, $f-b=3$ şi $f+2+b+2+m+2=$ $=60$, rezultă $3b+39=60 \Leftrightarrow 3b=21 \Rightarrow b=7$; $f=10$; $m=37$.

666. Asemănătoare cu problema **V.30.** din volumul **1**.

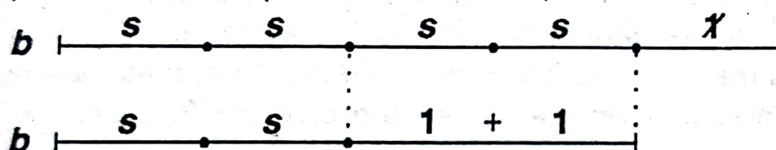
Notăm cu b numărul de băieţi, cu f numărul de fete, iar cu s numărul de surori din afirmaţia fetei. Fata se autoexclude din calculul său (căci nu este soră cu ea însăşi). Ea intră în calculul din afirmaţia băiatului. La fel şi băiatul, nu este frate cu el însuşi, dar intră în calculul din afirmaţia fetei.

Rezolvarea 1

Din afirmaţia fetei, rezultă:



Numărul de băieţi minus **1** (din afirmaţia băiatului) se poate obţine dacă repetăm de **2** ori segmentul ce reprezintă numărul de fete. Pentru a stabili mai uşor relaţia de diferenţă şi raport, repetăm primul segment astfel: prima parte de **2** ori, apoi de **2** ori cîte **1**, adică:



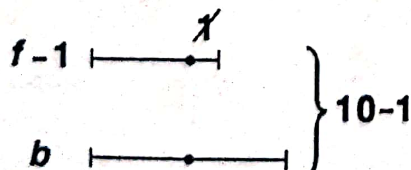
Din desen rezultă că $s=1$, $f=2$, iar $b=5$. Atunci $f+b=2+5=7$ (copii).

Rezolvarea 2

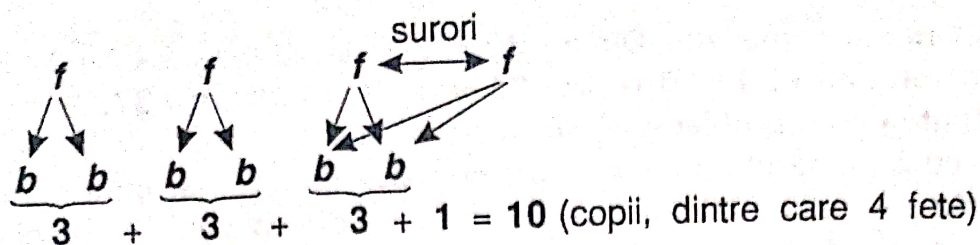
Păstrăm notaţiile de mai sus.

Avem: $(f-1)\cdot 5=b$ şi $b-1=2f$. Rezultă $5f-5-1=2f \Leftrightarrow 3f=6 \Rightarrow f=2$; $b=5$.

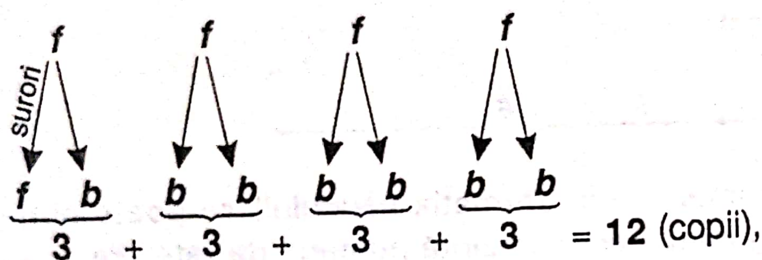
667. Afirmaţia: fiecare fată are **2** fraţi, poate fi înţeleasă în două moduri: a) fiecare fată are ca fraţi doi băieţi; b) fiecare fată are ca fraţi o fată şi un băiat. a) Dacă fiecare fată are ca fraţi **2** băieţi şi numai **2** fete sînt surori (deci fraţii pentru penultima sînt aceiaşi şi pentru ultima fată, adică **2** fete şi **2** băieţi sînt fraţi), rezultă că, dacă din numărul fetelor scădem **1**, obţinem jumătate din numărul băieţilor, adică:



Din desen, rezultă că jumătate din numărul băieţilor este **3**, căci $(10-1):3=3$. Cîţi băieţi erau? $2\times 3=6$ (băieţi). Cîte fete erau? $3+1=4$ sau $10-6=4$ (fete). Sau: Notînd cu f o fată, cu b un băiat şi încercînd să obţinem grupe de cîte o fată şi **2** băieţi, rezultă:



Sau: Notînd cu x numărul de fete, cu y numărul de băieți, din enunț rezultă: $x+y=10$ și $(x-1)\cdot 2=y \Leftrightarrow 2x-2=y$. Prima egalitate devine $x+2x-2=$ $=10 \Leftrightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$; $y=6$. b) Dacă înțelegem prin frații unei fete un băiat și o fată, rezultă:



dar $12>10$, deci nu sînt soluții. Sau: Din explicarea expresiei de mai sus astfel, rezultă că numărul fetelor și al băieților sînt două numere consecutive care nu pot avea suma pară (10), ci impară. Deci nu sînt soluții.

668. Rezolvarea pe baza metodei grafice este dificilă. De aceea apelăm la o variantă a metodei mersului invers (a se vedea rezolvarea **2**, problema VIII.1 din vol. 1).

Notăm cu C, S, L, I și, respectiv, P perioadele de viață date în enunț, cu R_1-R_4 perioadele care rămîn de fiecare dată, și cu T numărul de ani pe care i-a trăit acel om. Putem scrie:

	a trăit		i-a rămas de trăit
1)	$C=\frac{1}{13}T+2$ ani	←	$R_1=?$ (**70** ani)
2)	$S=\frac{1}{7}R_1+6$ ani	←	$R_2=?$ (**54** ani)
3)	$L=\frac{2}{9}R_2+14$ ani	←	$R_3=?$ (**28** ani)
4)	$I=\frac{1}{4}R_3+3$ ani	←	$R_4=?$ (**18** ani)
5)	$P=\frac{1}{6}R_4+15$ ani		—

Observație Dificultatea constă în a traduce în relație matematică ultima perioadă a vieții și anume „beneficiază de pensie cu 15 ani mai mult decît $\frac{1}{6}$

din numărul anilor rămași pînă la sfîrșitul vieții", adică perioada cît a beneficiat de pensie ($\frac{1}{6}$ din R_4 plus **15** ani), ceea ce înseamnă că perioada de pensie este R_4 (apoi a murit).

„Parcurgînd" un traseu de la sfîrșit spre început, în sensul săgeților, rezultă:

1) $R_4 = \frac{1}{6}R_4 + 15$ ani $\Rightarrow$ $\frac{5}{6}R_4 = 15$ ani $\Rightarrow$ $R_4 = 15 : 5 \times 6 \Rightarrow R_4 = 18$ ani; deci $P = 18$ ani;

2) $R_3 = R_4 + \frac{1}{4}R_3 + 3$ ani $\Rightarrow R_3 = 18$ ani $+ \frac{1}{4}R_3 + 3$ ani $\Rightarrow R_3 = 21$ ani $+ \frac{1}{4}R_3 \Rightarrow$ $\frac{3}{4}R_3 = 21$ ani $\Rightarrow R_3 = 21 : 3 \times 4 \Rightarrow R_3 = 28$ ani, iar $I = 28 : 4 + 3 \Rightarrow I = 10$ ani;

3) $R_2 = R_3 + \frac{2}{9}R_2 + 14$ ani $\Rightarrow R_2 = 28$ ani $+ 14$ ani $+ \frac{2}{9}R_2 \Rightarrow R_2 = 42$ ani $+ \frac{2}{9}R_2 \Rightarrow$ $\frac{7}{9}R_2 = 42$ ani $\Rightarrow$ $R_2 = 42 : 7 \times 8 \Rightarrow$ $R_2 = 54$ ani, iar $L = 54 : 9 \times 2 + 14 \Rightarrow$ $L = 26$ ani;

4) $R_1 = R_2 + \frac{1}{7}R_1 + 6$ ani $\Rightarrow R_1 = 60$ ani $+ \frac{1}{7}R_1 \Rightarrow R_1 = 60 : 6 \times 7 \Rightarrow R_1 = 70$ ani, iar $S = 70 : 7 + 6 \Rightarrow S = 16$ ani;

5) $T = R_1 + \frac{1}{13}T + 2$ ani $\Rightarrow$ $\frac{12}{13}T = 72$ ani $\Rightarrow T = 78$ ani, iar $C = 78 : 13 + 2 \Rightarrow$ $C = 8$ ani.

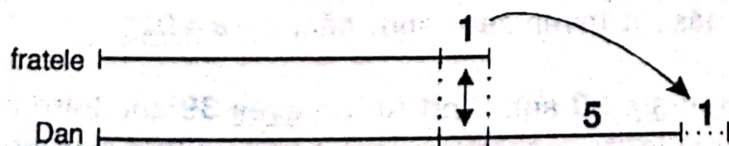
<u>Observație</u>: Problemele care sînt cuprinse în asemenea... proze versificate (**669 – 674**), deși sînt mai dificile, sînt mai atractive.

669. Enunțul cuprinde de fapt o glumă a unui pescar care dorea să arate că era priceput și <u>în ale cifrelor</u> și de aceea le <u>răsucea</u>. Deci în prezicerea lui, el se referă la cifre:

– „șase fără cap", adică cifra **6** fără cap devine **0**, deci **0**;
– „la nouă coad-ar lipsi", adică cifra **9** fără coadă devine **0**, deci **0**;
– „opt ar fi pe jumătate, adică cifra **8** pe jumătate devine **0**, deci **0**.

Răspunsul final este zero (pești).

670. O eventuală reprezentare grafică <u>a sumelor</u> pe care le are fiecare ar fi:



Rezultă că Dan ar avea mai mult decît fratele cu **7** lei, căci **1 + 5 + 1 = 7**.

<u>Sau</u>: Deoarece suma fratelui se micșorează cu **1** leu, iar suma lui Dan se mărește cu **1** leu, atunci diferența inițială de **5** lei se mărește cu **1 + 1**, adică cu **2** lei.

Sau: Dacă $a-b=5$, atunci $(a+1)-(b-1)=5\pm? \Leftrightarrow a-b+2=5\pm? \Leftrightarrow 5+2=5+2$, deci diferența devine **7**.

671. Un miracol... s-a întîmplat numai pentru cei care nu sînt atenți la „jocul" dintre singularul și pluralul verbului a fi. Cînd putem spune că sînt nuci? Cînd sînt două sau mai multe. Dar dacă există o nucă? Este o nucă. Din moment ce după lovirea crengilor pot spune că jos sînt nuci, înseamnă că înainte, în copac, era o nucă, iar pe jos era o nucă. Cînd nuca din copac a căzut, pe jos erau (sînt) nuci (două).

672. a) În rezumat avem că, după plecarea celor **7** plus **5** porumbei, pe casă sau în copac au rămas cît un sfert din întregul stol.
Ce parte (cît) reprezintă porumbeii care au plecat? Dacă pe copac au rămas cît un sfert din întregul stol, iar pe acoperiș tot cît un sfert din același întreg, rezultă că porumbeii rămași reprezintă un sfert plus un sfert = **2** sferturi = o jumătate din stolul de la început, iar porumbeii plecați, adică $7+5=12$, reprezintă cealaltă jumătate a stolului inițial. Cîți porumbei erau la început în stol? $2\times12=12+12=24$ (porumbei).
b) Dacă în loc de „Pe casă sau în copac" avem „Pe casă și în copac", rezultă că porumbeii rămași reprezintă la un loc un sfert din stolul inițial, iar $7+5=12$ porumbei reprezintă trei sferturi din același întreg. Cîți porumbei ar avea acel stol? $12:3\times4=16$ (porumbei).

673. (d) Atenție la timpul verbelor!
În rezolvarea acestei probleme, mulți au întîmpinat dificultăți în „traducerea" primului vers. Unii au afirmat că Anton era de aceeași vîrstă cu Ion (erau de-o seamă), alții, mai aproape de enunț, au afirmat că Ion este mai în vîrstă decît Anton.
Or, enunțul „Anton era tot atît de tînăr" ca Ion se poate traduce clar astfel: cu cîțiva ani în urmă (=„mai tînăr"), Anton avea vîrsta pe care o are acum Ion. Dacă notăm vîrsta pe care o are Anton cu a, iar vîrsta pe care o are Ion cu b, putem judeca astfel: cînd Anton avea vîrsta b (vîrsta actuală a lui Ion), bătrînul Miron avea o vîrstă egală cu vîrstele pe care le au cei doi acum împreună, adică $a+b$. Pe scurt, vîrsta lui Anton era (nu este) b, iar vîrsta bătrînului Miron era $a+b$. Deci bătrînul Miron era (este și va fi, căci diferența de vîrstă se păstrează) cu a mai mare decît Anton, deoarece $a+b>b$ cu a. Dacă acum Anton are a ani, diferența păstrîndu-se, bătrînul Miron are tot cu a ani mai mult, deci are $a+a=2a$ (ani). Cînd bătrînul avea a ani, Anton era nou-născut (avea zero ani), căci $a-a=0$.
Exemplu numeric:
Anton are **43** ani, iar Ion are **39** ani. Cînd Anton avea **39** ani, bătrînul avea suma vîrstelor pe care le au acum cei doi tineri, adică bătrînul avea $43+39=82$ ani. Cu cît este (a fost și va fi) mai în vîrstă bătrînul Miron față de Anton? $82-39=43$ (ani). Ce vîrstă avea Anton, cînd Miron avea vîrstă pe care o are acum Anton? Deoarece Anton are **43** ani, iar bătrînul Miron

este mai mare decît Anton cu **43** ani, rezultă că Anton avea zero ani (era nou-născut), căci $43-43=0$.

674. (d) Textul ascunde o problemă mai dificilă, în rezolvarea căreia putem apela la metoda falsei ipoteze în care avem trei mărimi. Înainte de a face vreo altă presupunere, considerăm că numărul grupelor (claselor) cu cîte **35** de elevi este egal cu numărul grupelor ce au cîte **32** de elevi (deci din numărul total de **500** de elevi scădem **3** clase a cîte **35** de elevi). Cîţi elevi şi cîte clase ar fi în total?

a) **500** elevi -3×35 elevi $=395$ elevi;

b) **15** clase -3 clase $=12$ clase.

Deoarece faţă de numărul claselor cu cîte **30** de elevi nu avem o altă relaţie, presupunem că toate cele **12** clase (grupe) au cîte **30** de elevi.

Cîţi elevi ar fi? $12\times30=360$ (elevi).

Cu cîţi elevi ar fi mai puţin decît **395**? $395-360=35$ (elevi).

Înlocuim clasele de cîte **30** de elevi din ipoteza (presupunerea) făcută cu grupuri de clase de cîte **35** şi, respectiv, **32** de elevi, pînă dispare diferenţa de **35**, adică punem cîte **2** clase (una cu **32** elevi şi una cu **35** elevi) în loc de **2** clase a cîte **30** elevi.

Cu cît se micşorează diferenţa de **35** la o singură înlocuire? $1\times32+1\times35-2\times30=7$ (elevi).

Cîte asemenea înlocuiri trebuie să facem pentru a dispărea diferenţa de **35** (cîte clase de cîte **32** elevi sînt)? $35:7=5$ (clase).

Cîte clase cu cîte **35** de elevi erau? $5+3$ (cele scăzute la început) $=8$ (clase).

Cîte clase cu cîte **30** elevi erau? $15-(8+5)=2$ (clase).

(Pentru alte moduri de rezolvare, a se vedea problemele VI.8. şi VI.9. din volumul 1).

675. Putem rezolva problema, completînd tabelul de mai jos în ordinea arătată de numerele scrise în dreptunghiuri (vezi tabelul):

numele/profesia	Croitoru	Zidaru	Lăcătuşu
croitor	nu (1)	nu (6)	DA (5)
zidar	DA (9)	nu (2)	nu (4)
lăcătuş	nu (8)	DA (7)	nu (3)

Dacă Croitoru nu este croitor, Zidaru nu este zidar, iar Lăcătuşu nu este nici lăcătuş, nici zidar, punem cuvîntul nu în dreptunghiurile **1**, **2**, **3** şi **4**. Rezultă

că Lăcătușu este croitor, deci punem cuvîntul DA în dreptunghiul **5**. Atunci Zidaru nu mai poate fi croitor (căci este Lăcătușu), deci punem în dreptunghiul **6** cuvîntul nu. Dacă Zidaru nu este nici zidar, nici croitor, el este lăcătuș, deci punem cuvîntul DA în dreptunghiul **7**, iar în dreptunghiul **8** cuvîntul nu, căci Croitoru nu mai poate fi nici lăcătuș (meseria lui Zidaru). Croitoru, nefiind nici croitor, nici lăcătuș, este zidar, deci punem în dreptunghiul **9** cuvîntul DA.

Deci: Croitoru este zidar;
Zidaru este lăcătuș;
Lăcătușu este croitor.

676. Putem rezolva problema folosindu-ne de un tabel asemănător celui de la problema anterioară sau judecînd astfel:
Dacă Vasile nu are numele de familie nici Vasile, nici Marin, înseamnă că are numele Dumitru (deci Dumitru Vasile). Pentru elevii cu prenumele Dumitru și Marin au rămas numele de familie Vasile și Marin; dar Marin nu are numele de familie Marin (din enunț), atunci avem: Vasile Marin, Marin Dumitru și Dumitru Vasile.

677. Din p_2 și p_4, rezultă că al doilea a dat **2 100** lei, iar al patrulea **1 210** lei. Din acestea și din p_1 și p_3 rezultă că al treilea a dat **2 600** lei, iar primul a dat **2 300** lei.

678. Dacă presupunem că primul tînăr a apreciat corect primul loc pentru Bogdan, rezultă că afirmația celui de-al cincilea este falsă („primul a fost Alex"). Dacă afirmația „primul a fost Alex" este falsă, rezultă că a doua afirmație a celui de-al cincilea tînăr este adevărată, adică „Bogdan a fost ultimul". Or, este imposibil: „Bogdan a fost primul și totodată al cincilea".
Dacă numai o afirmație este adevărată, rezultă că primul tînăr a afirmat corect numai că Alex a fost al doilea. Atunci afirmația celui de-al cincilea tînăr despre Alex este falsă, fiind adevărată numai afirmația sa că Bogdan a fost ultimul.
Ce afirmații s-au mai făcut despre ultimul loc?
Al patrulea tînăr a afirmat că Emil a fost al cincilea, ceea ce este fals. Rezultă că al patrulea a arătat corect numai locul lui Dany, adică primul. Atunci afirmația despre Dany făcută de al treilea tînăr este falsă, fiind adevărată numai afirmația că pe locul patru a sosit Cristi.
Este falsă și aprecierea despre locul lui Dany din afirmațiile celui de-al doilea tînăr, reținînd ca adevărată aprecierea că „Emil a sosit al treilea".
Deci ordinea sosirii a fost: Dany, Alex, Emil, Cristi și Bogdan.

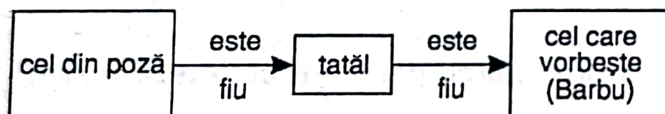
679. Notăm casele prin inițialele culorilor. Pentru **5** locuri, avem culorile: ***g***, ***a***, ***n***, ***r*** și ***v***. Din 1) și 2) rezultă că ***a*** nu poate fi pe locurile **1**, **2** sau **4**, dar poate fi pe locurile **3** sau **5**; avem și ordinea (***a***,***n***) sau (***n***,***a***).
Din 3) avem ordinea (***n***,***r***) sau (***r***,***n***) și nu avem (***r***,***v***) sau (***v***,***r***).
Din 2) și 3) avem ordinea (***a***,***n***,***r***).

Cum ordinea (*r*,*v*) sau (*v*,*r*) nu convine, rezultă că ***v*** este pe locul **2** (sau: dacă ***v*** ar fi pe ultimul loc, ***a*** ar fi vecină cu casa din mijloc, ceea ce nu convine). Deci ordinea caselor este: galbenă, verde, albă, neagră și roșie (se observă că în mijloc se află casa albă, deci „nu este vecină cu casa din mijloc").

680. Din relația 2) rezultă că după casa D urmează casa A.
Din relația 1) avem: casa C poate fi pe locurile **1**, **2**, **4** sau **5**, dar din 3) rezultă că această casă nu este nici pe extreme (pe margini).
Dacă distanța EC este egală cu distanța CD, rezultă că ordinea primelor patru case era: E, C, D, A. Casa B este la urma șirului, căci dacă ar fi în față, casa C ar fi la mijloc, ceea ce nu convine.
Deci ordinea caselor este: E, C, D, A, B.

681. În privința Anei, avem două situații:
1) dacă Ana spune adevărul despre Barbu, înseamnă că acesta minte;
2) dacă Ana minte, înseamnă că Barbu spune adevărul.
Din moment ce Dan (în ultima propoziție) spune că Ana <u>sau</u> Barbu minte, rezultă că Dan spune adevărul, iar afirmația anterioară a lui Barbu despre Dan este falsă. Deci Barbu minte. Dacă Barbu minte, rezultă că Ana spune adevărul (despre Barbu).
Răspuns: Ana <u>și</u> Dan spun adevărul, iar Barbu minte.

682.



Rezultă că fotografia reprezintă pe nepotul celui care vorbește (Barbu îi este bunic).

683. Dacă figura nu este nici a vreunui frate, nici a vreunei surori și totuși este figura unui copil al părinților celui care vorbește, rezultă că în tablou este figura celui care vorbește.

684. Cîte grămezi a vîndut în ziua anterioară prima femeie și cîți lei a încasat?
210 : 7 = 30 (grămezi); **30 × 50 = 1 500** (lei)
Dar cealaltă? **210 : 3 = 70** (grămezi); **70 × 50 = 3 500** (lei)
Cîți lei a încasat femeia în ultima zi?
(210 + 210) : 10 × 100 = 420 : 10 × 100 = 42 × 100 = 4 200 (lei).
Cîți lei trebuia să încaseze, dacă vindea merele ca în ziua precedentă?
1 500 + 3 500 = 5 000 (lei).
Cîți lei a pierdut (care este paguba)? **5 000 − 4 200 = 800** (lei).
Din ce cauză s-a produs paguba? Din moment ce prima femeie avea **30** de grămezi de cîte **7** mere, înseamnă că numai **30** de grămezi din merele celei de-a doua femei trebuiau vîndute la un loc, iar restul pînă la **70** de grămezi (cîte putea să realizeze ea din **210** mere grupîndu-le cîte **3**), adică **70 − 30 = = 40** grămezi de mere, trebuiau vîndute cîte **3** la **50** lei și se încasau astfel **30 × 100 + 40 × 50 = 3 000 + 2 000 = 5 000** lei. Ea a vîndut cele **40 × 3 =**

$=120$ mere ale sale (restul) la un preț mai mic, deoarece și pe acestea le-a grupat cîte 10 la 100 lei, încasînd astfel $30 \times 100 + 120 : 10 \times 100 = 3\ 000 + 1\ 200 = 4\ 200$ lei, pierzînd astfel $5\ 000 - 4\ 200 = 800$ lei (sau $40 \times 50 - 12 \times 100 = 800$ lei).
Cîți lei a primit fiecare, dacă paguba a fost suportată „pe din două"?
prima femeie: $1\ 500 - 800 : 2 = 1\ 500 - 400 = 1\ 100$ (lei);
a doua femeie: $3\ 500 - 800 : 2 = 3\ 500 - 400 = 3\ 100$ (lei).

685. a) Particularizare
Luăm un exemplu: fie $t=8$ ore, timpul în care parcurgem cu bicicleta distanța d. Pentru jumătate din distanță, avem nevoie de $8 : 2 = 4$ ore, viteza fiind constantă (medie). Cînd ne deplasăm cu mașina, în loc de 4 ore, ne trebuie un timp de 4 ori mai mic, adică $4 : 4 = 1$ oră, căci viteza este de 4 ori mai mare. Cînd mergem pe jos, în loc de 4 ore, ne trebuie un timp de 2 ori mai mare, adică $4 \times 2 = 8$ ore, căci viteza este de 2 ori mai mică. În total, în loc de 8 ore, ne trebuie $1 + 8 = 9$ ore. Deci ne deplasăm mai repede, dacă parcurgem distanța **d** numai cu bicicleta, căci $9 > 8$.
b) Generalizare
Dacă atunci cînd ne deplasăm cu bicicleta parcurgem $\frac{1}{2}d$ cu viteza v în $\frac{1}{2}t$, rezultă:
– cînd ne deplasăm cu mașina, parcurgem $\frac{1}{2}d$ cu viteza mașinii $v_m = 4v$ într-un timp de 4 ori mai mic decît $\frac{1}{2}t$, adică în $\frac{1}{2}t : 4 = \frac{1}{8}t$ (căci dacă viteza crește de un număr de ori, timpul necesar parcurgerii aceleiași distanțe se micșorează de același număr de ori);
– cînd ne deplasăm pe jos, parcurgem $\frac{1}{2}d$ cu viteza $v_p = v : 2$ într-un timp de 2 ori mai mare decît $\frac{1}{2}t$, adică în $\frac{1}{2}t \cdot 2 = t$.
Deci pentru toată distanța d, cu bicicleta ne trebuie timpul t, iar cînd mergem cu mașina, apoi pe jos, ne trebuie $\frac{1}{8}t + 1t = 1\frac{1}{8}t$. Deoarece $1\frac{1}{8}t > t$, rezultă că ne deplasăm mai repede dacă parcurgem toată distanța numai cu bicicleta.

686. Notăm numerele din a doua situație cu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{12}, a_{13}$. Din enunț rezultă: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} + a_{13}) : 13 = 7 \Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} + a_{13} = 13 \times 7 = 91$. Care sînt numerele naturale distincte nenule cu suma 91? Pentru început adunăm cele mai mici numere, începînd cu 1 pînă la 10, adică $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 = 55$; apoi: $55 + 11 = 66$; $66 + 12 = 78$; $78 + 13 = 91$.

Deci numerele sînt de la **1** la **13**. Suma numerelor din prima situație este $91+1=92$. Deoarece $92-91=1$, iar $14-13=1$, luăm numerele de la **1** la **12**, îl excludem pe **13** și îl înlocuim cu **14**, adică $78+14=92$.
Deci numerele sînt: 1, 2, 3, 4, ..., 11, 12, 14.

687. Cu siguranță, sînt necesare piese de 1g și de 2g. Cu ele putem cîntări și mase de 3g. Pentru a cîntări 4g, ne trebuie o piesă de 4g; cu acestea putem cîntări și mase de: $5g=4+1$; $7g=4+2+1$; $6g=4+2$ — i.e. $5g=4+1$; $6g=4+2$; $7g=4+2+1$.
Pentru a cîntări o masă de 8g, ne trebuie o piesă de 8g; cu piesele de pînă acum putem cîntări și mase de: $9g=8+1$; $10g=8+2$; $11g=8+2+1$; $12g=8+4$; $13g=8+4+1$; $14g=8+4+2$; $15g=8+4+2+1$.
Pentru a cîntări o masă de 16g, ne trebuie o astfel de piesă de 16g; cu toate piesele de pînă acum, putem cîntări orice greutate de la 16 la 31g, pentru ultima, combinăm astfel: $1+2+4+8+16=31$. Urmează piesa de 32g etc.
Pînă aici am stabilit piesele:
1g; 2g; 4g; 8g; 16g; 32g...
Cum putem descoperi următoarea piesă fără a mai efectua asemenea calcule? Nu descoperiți o regulă (o cheie)? Primul număr este **1**, al doilea **2**. Ce relație se poate stabili între aceste două numere și numărul următor, **4**?
$(1+2)+1=3+1=4$. Mai departe este valabilă? Da:
$(1+2+4)+1=7+1=8$; $(1+2+4+8)+1=15+1=16$;
$(1+2+4+8+16)+1=31+1=32$.
Următoarele piese sînt:
$(1+2+4+8+16+32)+1=63+1=64$;
$(1+2+4+\ldots+32+64)+1=127+1=128$;
$(1+2+4+\ldots+64+128)+1=255+1=256$;
$(1+2+4+\ldots+128+256)+1=511+1=512$;

Generalizare

În această serie, fiecare număr, începînd cu al doilea, este cu **1** mai mare decît suma tuturor numerelor care îl preced. (Se mai observă că: $2=2$; $4=2^2$; $8=2^3$; $16=2^4$; $32=2^5$, deci puteri ale numărului 2).

688. a) Căutați în coloana a doua și veți descoperi că $2\times2+6=10$, iar în coloana a treia, $5\times5+1=26$ etc. Deci regula: pătratul numărului din prima linie mărit cu numărul din a doua linie dă numărul din a treia linie. Mai departe: $3\times3+7=16$.
b) $7+5=12$, iar $12-2=10$; $10+5=15$, $15-2=13$ etc.
c) 1) Analizați a treia coloană, de exemplu, și veți descoperi: $3\times3+4=13$; $5\times5+4=29$; $1\times1+4=5$ etc.
2) Analizînd coloana a treia sau a patra, observăm că dacă din numerele de pe prima linie scădem numărul **2**, obținem pătratul numărului din linia a doua, adică:
$38-2=36$, dar $36=6\times6$;
$11-2=9$, dar $9=3\times3$;

$3-2=1$, dar $1=1\times1$;
$2-2=0$, dar $0=0\times0$.

689. Rezolvarea 1

Să luăm cîteva exemple:
$432-234=198$; $541-145=396$;
$673-376=297$; $792-297=495$;
$836-638=198$; $805-508=297$;
$231-132=99$.

Ce cheie ascund asemenea scăderi? La diferență, cifra zecilor este permanent aceeași, **9**; dar ce relație este între cifra unităților și cifra sutelor de la diferență? Dacă le adunăm ce obținem? $1+8=9$; $2+7=9$; $1+8=9$; $3+6=9$; $4+5=9$; $0+9=9$.

Deci suma dintre cifra unităților și cifra sutelor este totdeauna **9**.

Acum putem scrie toate diferențele:

– dacă cifra unităților de la diferență este **2** (cifra **1** nu poate fi, căci ar însemna să-l scădem pe **9** din **0**, dar cînd răsturnăm numărul, avem **0** pe locul sutelor, ceea ce nu convine), atunci cifra sutelor este $9-2=7$, iar diferența este **792**;

– dacă cifra unităților de la diferență este **3**, cifra sutelor este $9-3=6$, iar diferența este **693**; diferențele sînt: **792; 693; 594; 495; 396; 297; 198; 99** (pentru diferența **99**, avem exemplul: $231-132=99$, iar $9-9=0$, adică la sute nu avem cifră).

Rezolvarea 2

Să luăm exemplul: $541-145=396$.

Descăzutul poate fi scris sistematic astfel: $541=100\times5+10\times4+1$, dar $100\times5=99\cdot5+5$, atunci $541=99\cdot5+10\cdot4+6$.

Scăzătorul poate fi scris: $145=100\times1+10\times4+5=(99\times1+1)+10\cdot4+$ $+5=99\times1+10\times4+6$.

Rezultă scăderea: $99\cdot5+10\cdot4+6-(99\cdot1+10\cdot4+6)$. Scădem pe rînd fiecare termen din paranteză, adică: $99\cdot5+10\cdot4+6-99\cdot1-10\cdot4-6=$ $=99\cdot5-99\cdot1=99(5-1)=396$.

Ce reprezintă **5** și **1** din ultima scădere? Ele sînt cifrele de pe locul sutelor, respectiv, de pe locul unităților de la numărul inițial. Luînd mai multe exemple, putem concluziona că totdeauna diferența dintre un număr de **3** cifre distincte și răsturnatul său se poate obține și prin înmulțirea dintre numărul **99** și diferența dintre prima și ultima cifră a numărului inițial.

Exemple: $972-279=99\cdot(9-2)=99\cdot7=693$;
$581-185=99\cdot(5-1)=99\cdot4=396$;
$673-376=99\cdot(6-3)=99\cdot3=297$ etc.

Observație: Fiecare dintre aceste rezultate (diferențe), dacă este adunat cu răsturnatul său, dă suma **1 089**. Verificați!

690. a) $1+2+3+4+5+6+7+8\times9=100$;
$1+2\times3+4\times5-6+7+8\times9=100$;

$1+2\times3+4+5+67+8+9=100;$
$1\times2+34+56+7-8+9=100;$
$12+3-4+5+67+8+9=100;$
$12-3-4-\ +5-6+7+89=100;$
$123+4-5+67-89=100;$
$123-45-67+89=100.$

b) $(1+2):3=1$; $1\times(2+3)-4=1$; $(1+23):4-5=1$ sau $(12-3):(4+5)=1$; $(12+3-4):(5+6)=1$ sau $(12+3-4-5):6=1$; $(1\times2\times3\times4)-(5\times6-7)=1$; $(1+2\times3\times4):5:(6+7-8)=1$; $(1+2+3+4+5)-(6+7-8+9)=1$.

(Alte exerciții asemănătoare, la sfîrșitul cap.I).

c) $4=4$; $2\cdot\frac{1}{2}=1$, iar $2-1=1$; deci $1=1$;

$11\times1{,}1=12{,}1$, iar $11+1{,}1=12{,}1$; deci $12{,}1=12{,}1$;

$1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, iar $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; deci $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, iar $\frac{^{3)}1}{2}-\frac{^{2)}1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$, deci $\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ (adevărat).

d) 1) $13\times13+14\times14$; 2) $10\times10+11\times11+12\times12$.

e) 1) Pentru a continua piramida, să încercăm să aflăm cheia acestor curioase operații. Se știe că numărul **12 345** devine **11 111** dacă avem scăderea **12 345 − 1 234**. Luăm un rînd dat pe piramidă: **1 234 × 9 + 5 = 11 111**. În locul înmulțirii cu **9**, putem înmulți cu **(10 − 1)**; rezultă:

$$\begin{aligned}1\,234\times9+5 &= 1\,234\times(10-1)+5\\ &= 12\,340-1\,234+5\\ &= 12\,345-1\,234\\ &= 11\,111.\end{aligned}$$

Piramida completă este următoarea:

$$\begin{aligned}1\times9+2&=11\\ 12\times9+3&=111\\ 123\times9+4&=1111\\ 1234\times9+5&=11111\\ 12345\times9+6&=111111\\ 123456\times9+7&=1111111\\ 1234567\times9+8&=11111111\\ 12345678\times9+9&=111111111\end{aligned}$$

e) 2) În $123\times8+3$, în loc de **8**, punem factorul **(9 − 1)**, iar în loc de **3** punem **(4 − 1)**. Rezultă:

$$\begin{aligned}123\cdot(9-1)+(4-1) &= 123\cdot9-123+4-1\\ &= 123\cdot9+4-123-1\\ &= 123\cdot9+4-124\end{aligned}$$

De la piramida anterioară (rîndul al treilea), știm că $123\times9+4=1\ 111$. Atunci $1\ 111-124=987$.
Piramida completă este:

$$
\begin{aligned}
1\times8+1&=9\\
12\times8+2&=98\\
123\times8+3&=987\\
1234\times8+4&=9876\\
12345\times8+5&=98765\\
123456\times8+6&=987654\\
1234567\times8+7&=9876543\\
12345678\times8+8&=98765432\\
123456789\times8+9&=987654321
\end{aligned}
$$

e) 3) Pentru scrierea $987\times9+5=8\ 888$ care este cheia? De la piramida e)1) știm că, spre exemplu, $123\times9+4=1\ 111$. Dacă înmulțim ambii membri ai egalității cu 8, obținem: $123\times8\times9+4\times8=8\ 888$. De la piramida e)2), știm că $123\times8+3=987 \Leftrightarrow 123\times8=987-3 \Leftrightarrow 123\times8=984$.
A doua egalitate devine: $984\times9+4\times8=8\ 888$. De aici putem ajunge la prima scriere. Cum? Deoarece $4\times8=32$, iar primul produs are ca factor pe 9, atunci $32=3\times9+5$, iar $984\times9+4\times8=8\ 888 \Leftrightarrow 984\times9+3\times9+5=$ $=8\ 888 \Leftrightarrow 987\cdot9+5=8\ 888$ (am scos în factor comun pe 9, obținînd $9(984+3)+5$). Piramida completă este:

$$
\begin{aligned}
9\times9+7&=88\\
98\times9+6&=888\\
987\times9+5&=8888\\
9876\times9+4&=88888\\
98765\times9+3&=888888\\
987654\times9+2&=8888888\\
9876543\times9+1&=88888888\\
98765432\times9+0&=888888888
\end{aligned}
$$

f) 1) Cum se ajunge la asemenea egalități? Din ultimul rînd al piramidei e)1), avem că $12345678\times9+9=111111111$. Din primul membru al egalității scoatem factor comun pe 9, obținînd $9(12345678+1)=9\cdot12345679$. Înlocuind în prima egalitate, rezultă $12345679\times9=111111111$.
Pentru $12345679\times18=222222222$, avem
$12345679\times9\times2=111111111\times2=222222222$. Celelalte egalități sînt:

$$
\begin{aligned}
12345679\times9\times3&=333333333\\
12345679\times9\times4&=444444444\\
12345679\times9\times5&=555555555\\
12345679\times9\times6&=666666666\\
12345679\times9\times7&=777777777\\
12345679\times9\times8&=888888888\\
12345679\times9\times9&=999999999
\end{aligned}
$$

f) 2) Se observă că avem numai înmulţirea cu 1, iar adunarea produselor parţiale are la bază numărarea unităţilor (cîţi de 1). La rezultat, în mijloc avem 9, iar celelalte cifre descresc simetric de la 9, spre ambele capete, pînă la 1. Verificaţi, efectuînd înmulţirea în scris.

f) 3) Deoarece $573 \times 999 = 573 \cdot (1\,000 - 1)$

$= 573\,000 - 573 = 572\,427$, rezultă că, la înmulţirea numărului 999 cu orice alt număr de trei cifre, obţinem un produs format de 6 cifre: primele trei cifre reprezintă numărul cu care înmulţim, dar micşorat cu o unitate, iar celelalte trei cifre completează pe cele dintîi pînă la 9.

947x999=946 053

(947-1) — 946

9-9=0
9-4=5
9-6=3

$999 \times 981 = 980\,029$; $509 \times 999 = 508\,491$.

(Pentru alte moduri, a se vedea exerciţiul nr.195.g.).

f) 4) Se observă că numerele se termină în 5 şi trebuie să le înmulţim cu ele însele (ridicăm la pătrat numerele terminate în 5). În enunţ se observă că:

– produsul se termină în 25;

– celelalte cifre se obţin din înmulţirea cifrei zecilor numărului cu cifra consecutivă crescător sau celelalte cifre (din faţă) sînt tocmai produsul dintre numărul care se formează din cifrele rămase (fără cifra unităţilor) cu el însuşi, la care se adaugă încă o dată acest număr, adică:

$15 \times 15 = \overline{\cdot\cdot 25}$

$1 \times 2 = 2$ sau $1 \times 1 + 1 = 2$, deci $15 \times 15 = 225$;

$25 \times 25 = \overline{\cdot\cdot 25}$

$2 \times 3 = 6$ sau $2 \times 2 + 2 = 6$, deci $25 \times 25 = 625$;

$35 \times 35 = \overline{\cdot\cdot 25}$

$3 \times 4 = 12$ sau $3 \times 3 + 3 = 12$, deci $35 \times 35 = 1\,225$;

$45 \times 45 = \overline{\cdot\cdot 25}$

$4 \times 5 = 20$ sau $4 \times 4 + 4 = 20$, deci $45 \times 45 = 2\,025$;

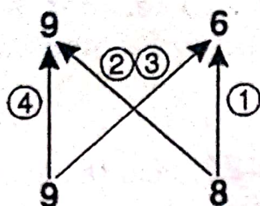
$55 \times 55 = \overline{\cdot\cdot 25}$

$5 \times 6 = 30$ sau $5 \times 5 + 5 = 30$, deci $55 \times 55 = 3\,025$;

$905 \times 905 = \overline{\cdot\cdot 25}$

$90 \times 91 = 8\,190$ sau $90 \times 90 + 90 = 8\,190$, deci $905 \times 905 = 819\,025$.

f) 5) a) Utilizăm înmulţirea în cruce, aşezînd (în minte) numerele astfel:



Efectuăm următoarele calcule (în ordinea numerelor de pe săgeţi):

1) $8 \times 6 = 48$, deci **8** este ultima cifră a rezultatului, iar **4** este cifră de transport;

2) $8 \times 9 = 72$; $72 + 4 = 76$;

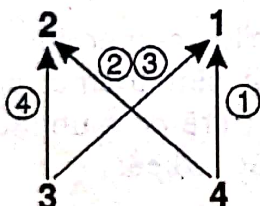
3) $9 \times 6 = 54$; $54 + 76 = 120$; **0** este penultima cifră a produsului, iar pe **13** îl transportăm;

4) $9 \times 9 = 81$; $81 + 13 = 94$; deci primele două cifre ale produsului sînt **94**, iar produsul este **9 408**.

Observaţie.

Avantajul acestui mod de calcul se vede mai clar dacă avem numere mai mici, de exemplu: $21 \times 34 = ?$

Urmăm explicaţiile de mai sus:



1) 4x1=④
2) 4x2=8
3) 3x1=3; iar 8+3=1①
4) 3x2=6; 6+1=⑦
deci produsul este 714

b) Rotunjim unul din factori la **100**, adică:

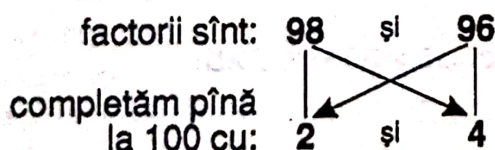
$98 \times 96 = 100 \times 96 - 2 \times 96$

$= 9\,600 - 192$

$= 9\,408.$

A se vedea şi $100 \times 98 - 4 \times 98$.

c) Rotunjim ambii factori pînă la **100**, adică:



Primele două cifre ale produsului final se obţin prin diferenţa dintre numerele indicate prin săgeţi, adică $96 - 2 = 94$ sau $98 - 4 = 94$. Deci pînă acum avem 94 de sute. Ultima cifră a produsului (sau ultimele două) le aflăm prin înmulţirea numerelor cu care am rotunjit factorii iniţiali, adică $2 \times 4 = 8$.

Produsul final este: $94 \times 100 + 8 = 9\,408$.

d) Transformăm unul dintre factori într-o înmulţire succesivă, adică:

$$
\begin{aligned}
98 \times 96 &= 98 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\
&= 294 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\
&= 588 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\
&= 1\ 176 \times 2 \times 2 \times 2 \\
&= 2\ 352 \times 2 \times 2 \\
&= 4\ 704 \times 2 \\
&= 9\ 408.
\end{aligned}
$$

691. Se numește sumă magică dacă suma obținută din numerele înscrise într-un pătrat cu $n \cdot n$ căsuțe este aceeași (constantă) cînd adunăm numerele dispuse pe rînduri, pe coloane sau pe diagonalele pătratului.

Atenție: În aceeași sumă nu este voie să se repete numerele!

a) În enunț avem **9** cifre. Înseamnă că pătratul are **9** căsuțe (pentru a le folosi pe toate).

O variantă:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Am început prin înscrierea numărului **5** în pătratul din mijloc (a treia parte din suma magică, pentru că fiecare sumă are cîte **3** termeni). Celelalte două numere care completează pe **5**, trebuie să aibă suma **10**.

b) Numerele pare de la **1** la **9** sînt: **2, 4, 6, 8**, care au suma chiar **20**. Dacă suma magică este **20**, avem nevoie, într-o singură sumă de toate aceste patru numere. Deci sînt $4 \times 4 = 16$ căsuțe.

O variantă:

8	4	2	6
2	6	8	4
6	2	4	8
4	8	6	2

Am început punînd în cele **4** căsuțe din mijloc toate cele **4** numere pare date. Celelalte două numere trebuie să completeze pînă la **20**.

692. d = dificil

Înainte de a dezlega rebusul, copiați împărțirile, iar pe măsură ce descoperiți literele, scrieți-le cu numărul de ordine, ca mai jos.

a) 1) Dacă produsul dintre *î*, ultima cifră a cîtului, și împărțitorul $\overline{ilț}$ este egală cu $\overline{ilț}$ (a se vedea ultima înmulțire), rezultă că $î = 1$.

2) Deoarece $n \neq î$, rezultă că (la prima scădere) avem $n - 1$ (cifră de transport) $- 1 = 0$, deci $n = 2$.

3) Deoarece $\overline{ilț} \times 2 = \overline{1l12}$ (prima înmulțire), rezultă că *ț* poate fi 1 sau 6; dar *ț*≠*î*, rezultă că *ț*=6, iar $\overline{il6} \times 2 = \overline{1l12}$, adică 2*i*+1 (cifră de transport) = 15, deci *i*=7.

Atunci împărțitorul $\overline{ilț} = 756$.

Numerotînd locul literelor, potrivit enunțului, pînă acum avem:

$\frac{î}{1}\ \frac{n}{2}\ \frac{}{3}\ \frac{}{4}\ \frac{l}{5}\ \frac{ț}{6}\ \frac{i}{7}\ \frac{}{8}\ \frac{}{9}\ \frac{}{0}$

Literele rămase din cuvînt sînt: ***a***, ***e***, ***m***, ***u***, ***r***. Dacă nu putem ghici acum cuvîntul, continuăm căutările.

4) Dacă *r* (a doua cifră a cîtului) înmulțit cu 756 dă $\overline{6aur}$ (a doua înmulțire), rezultă că $6 \times r = \overline{..r}$, adică *r* poate fi 1, 6 sau 8. Dar *r*≠*ț*≠*î*, rezultă *r*=8, iar 756×8=6 048, deci $\overline{6aur} = 6\ 048$, adică *a*=0, *u*=4, *r*=8. Dacă $\overline{21m0} - 1\ 512 = 618$, rezultă *m*=3. Pînă aici avem: ***înmulțir*(9)*a***. Se deduce ușor că *e*=9, iar cuvîntul căutat este ***înmulțirea***.

Împărțirea pe care am codificat-o este:

```
213 089 : 756 = 281 (rest 653)
151 2
=6188
 6048
 =1409
   756
  =653
```

b) Literele cuvîntului sînt: ***d***, ***j***, ***ă***, ***t***, ***c***, ***i***, ***r***, ***u***, ***e***, ***o***.

1) Deoarece $j \times \overline{ru} = \overline{ru}$ (prima înmulțire), rezultă *j*=1.

2) Din $\overline{udi} - \overline{joe} = \overline{eă}$ (ultima scădere, diferența are numai două cifre), rezultă că *u*=*j*+1, adică *u*=1+1=2.

3) Din $\overline{jdj} - \overline{r2} = \overline{dr}$ (prima scădere), rezultă că *r*=9; deci împărțitorul $\overline{ru} = 92$.

4) Deoarece 2×92=184, rezultă că $\overline{joe}$ (ultima înmulțire) este 184, deci *o*=8, *e*=4.

5) Deoarece 4×92=368, rezultă că $\overline{dăo}$ (al doilea produs) este 368, deci *d*=3, *ă*=6.

6) Deoarece 3×92=276, rezultă că $\overline{ută}$ =276 (al treilea produs), deci *t*=7.

Numerotînd locurile literelor, pînă acum avem:

$\frac{j}{1}\ \frac{u}{2}\ \frac{d}{3}\ \frac{e}{4}\ \frac{}{5}\ \frac{ă}{6}\ \frac{t}{7}\ \frac{o}{8}\ \frac{r}{9}\ \frac{}{0}$

Celelalte litere, cărora nu le-am găsit locul, sînt *i* și *c*.
Dacă mai este nevoie, continuăm, dar se poate „ghici" cuvîntul <u>judecători</u>, iar împărțirea care a fost codificată este:

```
1316750:92 = 14312 (rest 46)
92
=396
 368
 =287
  276
  =115
    92
    230
    184
    =46
```

693. Din <u>a doua variantă</u> a înmulțirii, rezultă:

1) $r=0$, deoarece sînt numai **4** produse parțiale în loc de **5** (factorii au cîte **5** cifre);

2) $d=1$, deoarece toate cele **4** produse parțiale au cîte **5** cifre; dacă $d \geq 2$ și dacă celelalte cifre sînt distincte, am obține cel mult **2** produse parțiale cu cîte **5** cifre (încercați să înmulțiți $\overline{2****}$ cu **1**, **3**, **4**, **5**, ținînd cont că după **2** ar urma o altă cifră semnificativă distinctă de celelalte).

Din <u>prima variantă</u> a înmulțirii, rezultă:

3) $o=2$, deoarece avem numai **3** produse parțiale de cîte **5** cifre: ultimul este obținut prin $1 \cdot \overline{ornem}$, iar celelalte două pot fi obținute prin înmulțirea cu **2** a altor două numere mai mici decît zece, distincte (cu **3** și cu **4**); dacă $d \geq 3$, s-ar obține un număr de forma $\overline{30***}$ sau mai mare, care ar da numai (la înmulțirea cu **2**) cel mult un singur produs parțial cu **5** cifre;

4) $c=3$ sau $c=4$, căci al patrulea produs parțial are numai **5** cifre (dacă $c \geq 5$, ar fi **6** cifre);

5) $u=3$ sau $u=4$, căci al patrulea produs parțial are numai **5** cifre (dacă $c \geq 5$, ar fi **6** cifre);

6) dacă $m \neq 0$, $m \cdot u = \overline{..0}$ și $t \cdot m = \overline{..0}$, rezultă u este număr par, deci $u=4$, $m=5$, iar $c=3$. (Au rămas literele *t*, *n*, *e*, *a* și cifrele **8**, **9**, **6**, **7**).

7) dacă $t \cdot 5 = \overline{..0}$, rezultă *t* este un număr par diferit de **2** și de **4**.

Din <u>a doua variantă</u> a înmulțirii, rezultă:

8) *n* nu poate fi **8** sau **9**, deoarece am obține **6** cifre la al treilea produs parțial (exemplu: $8 \times 3 = 24$; $8 \times 1 + 2 = 10$, deci o cifră în plus); la fel și pentru *e*; deci literele *n* și *e* pot lua una din valorile **7** sau **6**, iar literele care au mai rămas, *t* și *a*, pot fi **8** sau **9**; dar *t* este număr par, deci $t=8$, iar $a=9$.

Pînă aici avem:

d	o	c	u	m	_	_	t	a	r
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0.

Dacă nu putem ghici cuvîntul, continuăm căutările.

9) Dacă la a doua variantă a înmulțirii, în primul produs parțial avem $5 \times 4 = 20$, iar dacă $5 \times 9 + 2 = 47$, atunci pentru a obține la produsul final 1, gîndim $7 + ? = \overline{.1}$; deci $7 + 4 = 11$, iar $e \cdot 4 = \overline{\cdot 4}$, în care $e \neq 1$. Rezultă $e = 6$, iar $n = 7$. Cuvîntul este documentar, iar înmulțirea codificată a fost:

20 765 × 13 894 = 288 508 910.

694. Din dispunerea împărțirii, rezultă că a doua și a patra cifră a cîtului trebuie să fie zero (s-au coborît cîte 2 cifre). Împărțitorul este de forma $\overline{ab}$. Dacă $\overline{ab} \times 8 = \overline{cd}$ (număr de 2 cifre, a se vedea a doua înmulțire) și dacă $\overline{ab}$ înmulțit cu prima cifră a cîtului dă un produs de 3 cifre, rezultă că această cifră a cîtului este mai mare decît 8, adică este 9. La fel și pentru ultima cifră a cîtului; deci cîtul este 90 809.

Deoarece $\overline{ab} \times 8 = \overline{cd}$, iar $\overline{ab} \times 9 = \overline{efg}$, rezultă că singurul număr $\overline{ab}$ este 12. (căci: $10 \times 8 = 80$, dar $10 \times 9 = 90 \neq \overline{efg}$; $11 \times 8 = 99$, dar $11 \times 9 = 99 \neq \overline{efg}$; $12 \times 8 = 96$, iar $12 \times 9 = 108 = \overline{efg}$; $13 \times 8 = 104 \neq \overline{ab}$). Deîmpărțitul este 1 089 709, căci $\overline{ab} \cdot 90\,809 + 1 = 12 \cdot 90\,809 + 1 = = 1\,089\,709$.

695. 1) Din dispunerea înmulțirii, rezultă A, B și $C \neq 0$, căci nu s-ar obține trei produse parțiale.

2) Din $A \cdot C = \overline{.A}$ și din $B \cdot C = \overline{.B}$, rezultă C poate fi 1 sau 6 (căci $6 \times 2 = 12$; $6 \times 8 = 48$; $6 \times 4 = 24$ etc.).

3) Dacă $C = 1$, atunci primul produs parțial ar avea numai 3 cifre. Rezultă $C = 6$, iar A și B pot fi 2, 4 sau 8.

4) Deoarece al doilea produs parțial are 3 cifre, rezultă $A = 2$ (dacă $A = 4$ sau $A = 8$, ar fi 4 cifre), iar $B = 4$ sau $B = 8$.

5) Dacă $B = 4$, ultimul produs parțial ar avea numai 3 cifre. Rezultă $B = 8$.

Deci: $A = 2$; $B = 8$; $C = 6$, iar înmulțirea este $286 \cdot 826 = 236\,236$.

696. Metoda lui 9 de verificare (de efectuarea probei unei operații aritmetice) se bazează pe regula restului care arată că:

1) restul la împărțirea unei sume cu un număr oarecare este egal cu suma resturilor de la împărțirea fiecărui termen cu același număr;

2) restul produsului este egal cu produsul dintre resturile factorilor;

3) la împărțirea cu 9 a unui număr se obține același rest ca și la împărțirea sumei cifrelor acelui număr la 9 (criteriul divizibilității cu 9).

Cum se aplică această metodă la operațiile date în enunț?

a) **23 567 + 1 689 + 115 406 = 140 662.**

Adunăm (în minte) cifrele fiecărui termen și dacă obținem numere din două cifre le adunăm din nou pînă cînd obținem un număr format dintr-o singură cifră (mai mic decît 9). Aceste numere obținute sînt restul împărțirii la 9 a

fiecărui termen. Adunînd toate resturile trebuie să obținem același rezultat ca și atunci cînd aplicăm regula asupra sumei (totalului), adică:

– restul de la primul termen este **5**, căci $2+3+5+6+7=23$; $2+3=5$;

– restul de al doilea termen este **6**, deoarece: $1+6+8+9=24$; $2+4=6$;

– restul de la al treilea termen este **8**, pentru că $1+1+5+4+6=17$; $1+7=8$;

– restul final este **1**, deoarece $5+6+8=19$; $1+9=10$; $1+0=1$.

Tot restul **1** trebuie să obținem dacă aplicăm regula asupra sumei (rezultatului), adică: $1+4+6+6+2=19$; $1+9=10$; $1+0=1$.

Deci adunarea este corect efectuată.

b) **176 391 − 85 297 = 91 094.**

Deoarece descăzutul este egal cu suma dintre scăzător și diferență, putem privi scăderea ca o adunare.

Restul de la scăzător este **4**, căci $8+5+2+9+7=31$; $3+1=4$.

Restul de la diferență este **5**, pentru că $9+1+9+4=23$; $2+3=5$.

Restul final este **0**, căci $5+4=9$; $9:9=1$ (rest 0).

Tot restul **0** trebuie să fie și la împărțirea descăzutului, adică: $1+7+6+3+9+1=27$; $2+7=9$. Deci scăderea este corect efectuată.

c) **9 084 × 308 = 2 797 872.**

Restul obținut de la primul factor este **3**, căci $9+8+4=21$; $2+1=3$.

Restul obținut de la al doilea factor este **2**, pentru că $3+8=11$; $1+1=2$.

Restul obținut de la produsul celor două resturi este **6**, căci $3\cdot 2=6$.

Tot **6** trebuie să fie și restul obținut prin aplicarea regulii asupra produsului (rezultatului), adică $2+7+9+7+8+7+2=42$; $4+2=6$.

Înmulțirea este corect efectuată.

Observație Dacă la o astfel de verificare se va descoperi o greșeală, pentru a determina locul acesteia, aplicăm regula asupra fiecărui produs parțial.

d) **34 462 : 807 = 42** (rest **568**) Pentru a aplica „regula lui **9**" de verificare, privim împărțirea pe baza definiției, adică: **34 462 = 807 × 42 + 568**. Restul de la deîmpărțit este **1**, deoarece $3+4+4+6+2=19$; $1+9=10$; $1+0=1$. Restul produsului dintre cît și împărțitor este **0**, căci: $8+7=15$; $1+5=6$; $4+2=6$; $6\times 6=36$; $3+6=9$; $9:9=1$ (rest 0). Restul de la împărțirea restului este **1**, pentru că $5+6+8=19$; $1+9=10$; $1+0=1$. Deoarece $1=0+1$, împărțirea este corect efectuată.

697. a) **8·134 =**

Trebuie să calculăm produsul celor două numere pe baza împărțirii și a înmulțirii cu **2**, adică;

$8\cdot 134=$

$(8:2)\cdot(134\cdot 2)=4\cdot 268;$

$(4:2)\cdot(268\cdot 2)=2\cdot 536;$

$(2:2)\cdot(536\cdot 2)=1\cdot 1\,072$

$=1\,072$

Deci procedeul constă în împărţirea succesivă a unuia dintre factori la **2** pînă se obţine cîtul **1** şi dublarea simultană a celuilalt factor. Ultimul rezultat dublat este tocmai produsul căutat (a se vedea şi regula de la ex. **107** şi **108**).

b) $64 \cdot 72 =$

$(64 : 2) \cdot (72 \cdot 2) = 32 \cdot 144;$
$(32 : 2) \cdot (144 \cdot 2) = 16 \cdot 288;$
$(16 : 2) \cdot (288 \cdot 2) = 8 \cdot 576;$
$(8 : 2) \cdot (576 \cdot 2) = 4 \cdot 1\,152;$
$(4 : 2) \cdot (1\,152 \cdot 2) = 2 \cdot 2\,304;$
$(2 : 2) \cdot (2\,304 \cdot 2) = 1 \cdot 4\,608$
$= 4\,608.$

c) $16 \cdot 1\,234 =$

$(16 : 2) \cdot (1\,234 \cdot 2) = 8 \cdot 2\,468;$
$(8 : 2) \cdot (2\,468 \cdot 2) = 4 \cdot 4\,936;$
$(4 : 2) \cdot (4\,936 \cdot 2) = 2 \cdot 9\,872;$
$(2 : 2) \cdot (9\,872 \cdot 2) = 1 \cdot 19\,744$
$= 19\,744.$

d) $9 \times 23 =$

Observăm că fiecare factor este un număr impar. Cum procedăm, dorind să aplicăm procedeul de calcul cerut? Pentru a obţine un factor par, scădem din **9** pe **1**; la rezultatul final adăugăm pe 1×23, adică:

$9 \times 23 =$

$(9 - 1) : 2 \cdot (23 \cdot 2) = 4 \cdot 46;$
$(4 : 2) \cdot (46 \cdot 2) = 2 \cdot 92;$
$(2 : 2) \cdot (92 \cdot 2) = 184$, iar
$184 + 1 \times 23 = 207.$

e) $17 \times 13 =$

$(17 - 1) : 2 \cdot (13 \cdot 2) = 8 \cdot 26;$
$(8 : 2) \cdot (26 \cdot 2) = 4 \cdot 52;$
$(4 : 2) \cdot (52 \cdot 2) = 2 \cdot 104;$
$(2 : 2) \cdot (104 \cdot 2) = 1 \cdot 208$, iar
$208 + 1 \times 13 = 221$

f) $29 \times 21 =$

$(29 - 1) : 2 \cdot (21 \cdot 2) = 14 \cdot 42;$
$(14 : 2) \cdot (42 \cdot 2) = 7 \cdot 84;$
$(7 - 1) : 2 \cdot (84 \cdot 2) = 3 \cdot 168;$
$(3 - 1) : 2 \cdot (168 \cdot 2) = 1 \cdot 336.$

În cazul f), care este produsul căutat? La rezultatul final, **336**, trebuie să adăugăm $1 \times 168 + 1 \times 84 + 1 \cdot 21$ (numerele pe care le-am neglijat prin scăderea lui **1** din numerele impare). Deci: $29 \times 21 = 336 + 1 \cdot 168 + 1 \cdot 84 + 1 \cdot 21 = 336 + 168 + 84 + 21 = 609$.

698. a) Deoarece $984 \cdot 1\,001 = 1\,000 \cdot 984 + 984 \cdot 1$
$= 984\,000 + 984$
$= 984\,984$, rezultă că produsul dintre un număr de forma $\overline{abc}$ și numărul **1 001** este format din numărul $\overline{abc}$ scris de **2** ori, adică $\overline{abcabc}$;

$1\,001 \times 736 = 736\,736$; $1\,001 \times 903 = 903\,903$.

b) Deoarece $73 \times 10\,101 = 73 \cdot 10\,000 + 73 \cdot 100 + 73$
$= 730\,000 + 7\,300 + 73$
$= 737\,373$, rezultă că produsul dintre un număr de forma $\overline{ab}$ și numărul **10 101** este format din numărul $\overline{ab}$ scris de **3** ori, adică $\overline{ababab}$;

$87 \times 10\,101 = 878\,787$; $10\,101 \times 93 = 939\,393$.

699. a) Deoarece $\overline{abc} \cdot 1\,001 = \overline{abcabc}$, rezultă că $\overline{abcabc} : 1\,001 = \overline{abc}$, iar $\overline{xyzxyz} : 1\,001 = \overline{xyz}$.

b) Deoarece $\overline{ab} \cdot 10\,101 = \overline{ababab}$, rezultă că $\overline{ababab} : 10\,101 = \overline{ab}$, iar $\overline{xyxyxy} : 10\,101 = \overline{xy}$.

700. Folosiți regulile privitoare la paritate din soluțiile ex. nr.**278**.
Dacă elevii erau împărțiți în **10** grupe egale ca număr, rezultă că numărul total al elevilor se termină în zero, este un număr par. Cînd elevii sînt redistribuiți în **5** rînduri, avem:
primul rînd: x elevi; al doilea: $x+1$; al treilea: $x+2$; al patrulea: $x+3$; al cincilea: $x+4$ elevi. Pe baza acestor relații, scriem numărul total de elevi din clasă: $x+x+1+x+2+x+3+x+4=5x+10$. Dar acest număr se termină în zero, adică $5x+10=\overline{.0}$ (număr par). Dacă suma și un termen al său sînt numere pare, rezultă că și celălalt termen este număr par; deci $5x$ este un număr par. Dar **5** este un număr impar; rezultă că x este un număr par (căci numărul impar trebuie înmulțit cu un număr par pentru a obține un număr par). Dacă x este număr par, atunci consecutivul său, $x+1$, este un număr impar, iar $x+2$ este număr par, $x+3$ este număr impar, $x+4$ este număr par. Dintre acestea, cel mai mare număr impar este $x+3$ (elevii care au trecut la primul atelier); rîndurile care au trecut la al doilea atelier sînt primul, al treilea și al cincilea, cu $x+x+2+x+4=3x+6$ elevi, număr par (nu putem lua ca termen al sumei pe $x+1$, număr impar, căci s-ar obține ca sumă un număr impar). Rezultă că la al treilea atelier a trecut rîndul al doilea cu $x+1=5$ elevi. Atunci: $x=5-1=4$ elevi; celelalte rînduri aveau respectiv **5**, **6**, **7** și **8** elevi, în total fiind $4+5+6+7+8=30$ elevi.

701. a) Zilele sînt: răsalaltăieri, alaltăieri, ieri, azi, mîine, poimîine, răspoimîine.

b) Atenție și la timpurile verbului a fi!

Notăm cu ***a*** ziua săptămînii în care ne aflăm. În relație cu aceasta, zilele anterioare și cele următoare se numesc astfel:

c	b	a	d	e
alaltăieri	ieri		mîine	poimîine

Pentru ca ziua ***c*** să fie numită mîine, trebuie să mai fie o zi ***f***, în fața lui ***c***, numită azi; acest azi era (nu este) „tot atît de departe de sîmbătă...".
Cînd ziua ***e*** (numită, în momentul în care ne aflăm poimîine) va fi (nu este) ieri, ziua numită azi este ziua ***g***, adică:

AZI f —mîine→ c (alaltăieri) b (ieri) a d (mîine) e (poimîine) ←ieri— AZI g

Dacă ziua ***f*** este tot atît de departe de sîmbătă ca și ziua ***g***, rezultă că ziua din mijloc este ziua de sîmbătă, tocmai ziua ***a*** în care ne aflăm (în fața lui ***a*** sînt **3** zile, iar după ***a*** sînt alte **3** zile).

702. d. Putem reduce problema la una cu **2** mărimi: în **46** de capete și **112** picioare sînt două grupe de animale, adică o grupă a păsărilor și o grupă a animalelor cu **4** picioare. Cîte animale numără fiecare grupă?
Presupunem că ar fi animale numai cu **2** picioare (păsări).
Cîte picioare ar fi? $46 \times 2 = 92$.
Cîte picioare ar lipsi? $112 - 92 = 20$.
Înlocuim animalele cu **2** picioare cu animale cu **4** picioare pînă dispare diferența de **20**.
Cîte animale cu **4** picioare (porci și vaci) sînt: $20 : (4 - 2) = 10$.
Cîte păsări sînt? $46 - 10 = 36$.
În numărul **10**, numărul de vaci reprezintă un sfert din numărul porcilor. Cîte vaci sînt? $10 : (4 + 1) = 2$.
Cîți porci sînt? $10 - 2 = 8$ sau $2 \times 4 = 8$.
În numărul **36**, numărul rațelor reprezintă o jumătate din numărul găinilor. Cîte rațe sînt? $36 : (2 + 1) = 12$.
Cîte găini sînt? $2 \times 12 = 24$ sau $36 - 12 = 24$.

CUPRINS

Editura:



POLIROM
Bd. Copou nr. 3, Iaşi, 6600, P.O. Box 266
Tel. 032-214100; 032-214111

Tehnoredactor: Dumitru SCORŢANU
Format 16(70x100)
Bun de tipar: martie 1995
Apărut: aprilie 1995

Tipografia:



POLIROM SA,
Calea Chişinăului nr. 32 Iaşi
Tel.: 032-230323; 032-230485

ISBN 973-97108-1-6

PREŢ: 4850 LEI

Culegera institutorilor Dumitru Pârâială şi Viorica Pârâială este absolut o reuşită, deoarece propune, pe lîngă mai multe metode şi procedee de rezolvare a fiecărei probleme, şi moduri de căutare a acestor soluţii...

Tot ca o noutate sînt tehnicile şi procedeele de calcul cu numere naturale care, deşi pretind profunzime în gîndire şi ingeniozitate, au la bază cunoştinţele însuşite de elevii din ciclul primar...
şi care constituie fundamentul integrării acestora în abordarea algebrică a egalităţilor, a inegalităţilor, a problemelor etc.

Lucrarea constituie un foarte mare ajutor în formarea şi perfecţionarea învăţătorilor...

Cartea se adresează elevilor, cadrelor didactice, precum şi celor care doresc să pătrundă în lumea cunoaşterii pe căile oferite de aritmetică...

VeronicaBarnea
profesor la Şcoala Normală
„V. Lupu” din Iaşi



EDITURA POLIROM